Modélisation par éléments distincts d'ouvrages en génie civil. La méthode « Non Smooth Contact Dynamics »

Robert Péralès* —Frédéric Dubois**—Marc Vinches*—Claude Bohatier**

*Ecole des Mines d'Ales. CMGD 6 Avenue de Clavières, 30319 Ales Cedex. <u>robert.perales@ema.fr</u>, <u>marc.vinches@ema.fr</u>

^{**} Laboratoire de Mécanique et Génie Civil. Université de Montpellier 2. cc048 Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 05. <u>dubois@lmgc.univ-montp2.fr</u>, <u>bohatier@lmgc.univ-montp2.fr</u>

RÉSUMÉ. Après une présentation des bases théoriques et bibliographiques relatives à la méthode Non Smooth Contact Dynamics, trois structures réelles de génie civil sont présentées. Elles ont la particularité d'illustrer le comportement d'ouvrages en pierre postcontrainte, et d'un ouvrage antique, comportant plusieurs milliers de blocs, en en respectant l'appareil.

ABSTRACT. After a recollection of the theoretical basis and main references concerning the Non Smooth Contact Dynamics method, three real civil engineering structures are presented. They have the peculiar features of a post-stressing use, and the modelling of a Roman bridge, with thousands of tri-dimensional blocks, representing the original stone course.

MOTS-CLÉS : maçonnerie en grand appareil, précontrainte, mécanique non régulière, génie civil.

KEYWORDS: large stone course masonry, pre-stressing, non smooth contact dynamics, civil engineering.

1. introduction

Avec le développement des programmes de préservation du patrimoine, un intérêt accru est porté à l'étude des ouvrages maçonnés et à leur modélisation sous différentes sollicitations. Dans ce domaine la structure peut être considérée comme une collection de corps rigides ou déformables entre lesquels des relations d'interaction, usuellement du contact avec frottement, sont susceptibles de s'établir ou de se rompre. Ces types de milieux « divisés » composés d'un grand nombre de corps peuvent être modélisés par les méthodes par éléments distincts (MED).

Le présent travail est le résultat d'une collaboration entre l'Ecole des Mines d'Alès et le Laboratoire de Mécanique et Génie Civil de l'Université de Montpellier II. Il s'appuie principalement sur le savoir faire développé par Michel Jean et Jean Jacques Moreau dans le domaine de la simulation des grandes collections de corps rigides ou déformables en contact.

De nombreux ouvrages de génie civil sont des structures maçonnées. Dans de nombreux cas, ces structures sont étudiées comme des milieux continus. Cette hypothèse n'est pas réaliste dans certaines applications comme la construction en pierre massive à joints vifs, ou la construction en appareillages de pierres avec mortier, de propriétés mécaniques faibles. Dans le premier cas de figure, on peut classer des monuments antiques tels que l'aqueduc d'Arles, au franchissement du vallon des Arcs à Fontvieille, ou des parties du pont du Gard, ou encore des arènes de Nîmes.

Les figures suivantes présentent divers éléments de structure de ces monuments, illustrant le fait qu'il apparaît réaliste de les modéliser partiellement, comme des collections de corps discrets ou blocs.



Figure 1. Vue générale de l'aqueduc d'Arles et de l'aqueduc des moulins, au vallon des Arcs, à Fontvieille.

Les modes de construction (faces de blocs planes, blocs montés à sec) ainsi que les faciès de ruine de cet édifice ne permettent pas de considérer l'ouvrage comme continu.

A la suite de la construction d'un deuxième aqueduc, à l'Est, dit aqueduc de Barbegal, alimentant une meunerie industrielle, il semble que le premier aqueduc d'Arles, ait été ruiné, et qu'un deuxième aqueduc ait été reconstruit, sur les piles du

premier, en utilisant une technique de petit appareillage en façade, et utilisation d'une maçonnerie de blocage à l'intérieur de la structure supérieure de l'ouvrage, schématisé figure .



Figure 2. Modèle des maçonneries en grand appareil en partie inférieure, et en petit appareil et maçonnerie de blocage en partie supérieure, du deuxième aqueduc d'Arles, au vallon des Arcs, à Fontvieille.

La modélisation de tels ensembles par des modèles continus ne semble pas réaliste, notamment pour ce qui concerne les parties de structure en grand appareil à joints secs.

Dans le cadre des études entreprises sous l'impulsion de la Direction Régionale des Affaires Culturelles de la région Languedoc-Roussillon, concernant les arènes de Nîmes (fig. 3), il est apparu nécessaire de modéliser le bâtiment, de façon à obtenir des plans de coupe, de recollement d'interventions et des indications réalistes en termes de masses de maçonneries mises en œuvre, descentes de charges, suivis des pathologies, etc. L'Ecole des Mines d'Alès a entrepris de réaliser une modélisation géométrique réaliste du bâtiment, (fig. 4) à partir de plans, de relevés sur le terrain, et d'une synthèse d'architecture réalisée par Myriam Fincker. Cette étape a donné lieu à la simulation de descentes de charges, sur certaines géométries particulières, en utilisant un modèle éléments discrets 3D.



Figure 3. Vue partielle des arènes de Nîmes, détail de maçonneries en grand appareil.



Figure 4. Arènes de Nîmes. Exemple de géométrie modélisée (CMGD, Ecole des Mines d'Alès)

La relative complexité de la géométrie, réellement tridimensionnelle de l'édifice, l'agencement particulier des blocs de pierre utilisés pour la partie la plus externe de

l'édifice (galeries extérieures, et de l'attique), les techniques de construction des arcs de décharge en façade, et des linteaux de la galerie extérieure du premier étage ne sont évidemment pas prises en compte dans un modèle continu élastique. Nous exposerons comment des arrangements de polyèdres tridimensionnels peuvent être modélisés de façon plus réaliste par les méthodes aux éléments distincts (MED).

Nous allons rappeler les grandes lignes des méthodes par éléments distincts, et plus particulièrement de la méthode NSCD. Nous présenterons quelques résultats numériques sur trois structure réelles. Ces résultats on été obtenus avec le code de calcul LMGC90.

2. Méthodes par éléments distincts: la méthode NSCD

Les méthodes par éléments distincts (MED) ont pour objet de modéliser un milieu divisé au travers du comportement collectif de ses composants, chaque composant pouvant par ailleurs être un objet complexe. Ces méthodes sont très utilisées, par exemple, pour la modélisation des milieux granulaires (sable, roches, grains dans des silos, etc.), des milieux condensés (gels), des milieux vivants (cellules osseuses), certains milieux continus endommageables ou micro fracturés, mais aussi les mécanismes (robotique).

2.1. Description d'un mouvement d'un corps en présence de « contact »

Les équations de la dynamique régissant le mouvement d'un corps en présence de « contact » (mais en l'absence de choc) peuvent s'écrire sous la forme synthétique suivante :

 $\begin{cases} M \ddot{q} = F(q, \dot{q}) + P(t) + r \\ \text{conditions initiales et aux limites} \end{cases}$

où q désigne les variables de Lagrange (par exemple translations et rotations du centre de gravité d'un corps rigide, ou déplacements d'un nœud d'un maillage), r désigne la contribution des efforts de « contact » à cette équation (torseur ou réaction nodale) et $F(q, \dot{q}) + P(t)$ représente la somme des efforts internes et externes.

Pour un corps déformable l'expression de l'équation de la dynamique peut être obtenue par discrétisation par éléments finis du problème continu. Pour un corps rigide cette équation signifie que le torseur des efforts extérieurs vaut le torseur dynamique. On peut lui préférer d'autres formes comme les équations d'Euler Newton :

$$\begin{cases} M \ddot{u} = P(t) + r \\ I \dot{\omega} + \omega \wedge (I.\omega) = Mp(t) + Mr \end{cases}$$

Où *u* désigne le déplacement, ω la vitesse de rotation autour du centre d'inertie du corps, P(t) et Mp(t) la résultante et le moment résultant des forces appliquées, *r* et Mr la résultante et le moment résultant des efforts de contact, et M,I les matrices de masse et d'inertie. La seconde équation de ce système est éventuellement non linéaire à cause du second terme de gauche. Ce terme disparaîtra dans une formulation 2D ou lorsque le corps est « isotrope » géométriquement. Il existe d'autres formes d'écriture des équations du mouvement des solides rigides, par exemple les équations de Lagrange, les formulations variationnelles (voir Brogliato et al. (2002)).

2.2. Intégrateurs

Contrairement à la discrétisation en espace, la discrétisation en temps est perturbée par l'introduction de conditions de « contact ». En effet en présence de chocs, ou ne serait ce qu'en présence de contacts simultanés avec un découpage temporel arbitraire, les dérivées précédentes doivent se comprendre au sens des distributions (Moreau & Jean (1992)). On parlera dans ce cas de **problème non régulier**. Quel que soit le schéma d'intégration nous cherchons à obtenir une solution discrète des équations différentielles, i.e. à des instants : $t_0 < ... < t_n$.

Dans le cas non régulier deux approches sont envisageables :

- L'approche événementielle (event-driven) où le découpage temporel est ajusté sur les évènements non réguliers. On essaie autant que possible de séparer la partie régulière du mouvement (vol libre, contact établi) de la partie non régulière du mouvement (choc, décollement). Cette méthode permet d'utiliser quasiment n'importe quel intégrateur d'ordre élevé (Abadie (1998)) mais nécessite de reformuler les conditions de contact en accélération ce qui est contestable.
- L'approche pas à pas (time-stepping) où le découpage en temps est fixé de manière arbitraire et non nécessairement constant. La méthode est capable d'intégrer les équations du mouvement au cours d'un pas de temps donné. Dans ce cas, l'ordre de l'intégrateur est nécessairement faible. La méthode de Time-stepping est la mieux adaptée pour aborder le problème de discontinuités temporelles.

3. Détection des intéractions

Le principe général utilisé pour la détection est le suivant:

- détection d'une proximité grossière des contacteurs (pré détection). Partant d'informations géométriques grossières, de valeurs de distance d'alerte on va identifier les zones potentielles de contact.
- test sur la visibilité des contacteurs. Une table de visibilité permet de faire un trie dans les contacts potentiels en décidant arbitrairement que certains ne

sont pas valables. De plus cela permet d'affecter une loi de contact dépendant de la « couleur » des contacteurs en interaction (propriété mutuelle de deux contacteurs).

- détection précise du lieu de contact: point, ligne, face (détection locale).
- calcul des informations locales: repère, interstice, vitesse relative,etc.

Dans toutes ces opérations c'est la détection grossière et le calcul précis du point de contact qui s'avère le plus coûteux. On trouve un certain nombre de méthodes de détection (pré ou locale):

 méthode des boîtes de taille uniforme (pré). En se callant sur la taille des particules et la valeur des distances d'alerte, ... on vient faire un maillage de l'espace. Grâce à ça on ne détectera que les particules situées dans une boîte et ses voisines,



Figure 5. Création du partitionnement en boîtes sur un échantillon.

 Méthodes de Shadow-overlap (JJ Moreau), plan séparateur (Cundall), GJK. Il s'agit de méthodes plus « mathématiques » de calcul de points de contact. Elle se base sur des techniques de projection. Elles ont l'avantage d'être très puissantes et assez génériques.

3.1. Cinématique et comportement des interactions

• Les lois de comportement au « contact » entre un contacteur candidat (C) et un corps antagoniste (A) sont décrites par une relation point à point. On suppose qu'on peut définir à chaque instant les deux points les plus proches des contacteurs (A et C), et un repère local (n,t,s) porté par le contacteur antagoniste; la normale étant dirigée vers le contacteur candidat ; (t,s) définit le plan tangent au contacteur antagoniste. Les lois d'interaction les plus utilisées sont :

Pour le contact : loi de Signorini.

 U_N, g

 R_N

Dans sa forme classique la loi de Signorini relie l'interstice à la réaction normale par une relation de complémentarité:

$$g \ge 0, R_N \ge 0, gR_N = 0$$

Pour le contact entre corps rigides JJ Moreau a montré qu'en cas de contact « établi » cette relation était

équivalente à une relation de Signorini exprimée en vitesse:

$$U_N \ge 0, R_N \ge 0, U_N R_N = 0$$

Dans certains cas on lui préfèrera une version régularisée.

Pour le frottement : loi de Coulomb



De même on peut lui préférer une loi régularisée, ou une version avec un coefficient de frottement variable.

Il existe beaucoup d'autres lois, on pourra par exemple consulter à se sujet Cambou et Jean (2001).

4. Stratégies et méthodes de résolution

On pourra trouver dans Brogliato et al. (2002) un excellent panorama sur la simulation numérique des systèmes dynamiques non réguliers, et dans Jean (1993) une description de plusieurs stratégies et méthodes de résolution.

Nous allons voir ici les deux derniers ingrédients entrant dans la composition de nos « solveurs » : la façon de poser le problème de « contact » et la méthode employée pour le résoudre. D'un point de vue formel, sur la figure 6, nous pouvons schématiser le problème à résoudre de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{q} \\ \leftarrow \acute{e}quation de \, la \, dynamique \rightarrow \{r\} & \text{niveau global} \\ H^*(q) \downarrow & \uparrow H(q) \\ \left\{ U^{\alpha} \\ \right\} & \leftarrow loi \, de \, contact \rightarrow \\ \left\{ R^{\alpha} \\ \right\} & \text{niveau local} \end{cases}$$

Figure 6. Relations entre niveau local et niveau global

Au niveau global nous avons l'ensemble des systèmes d'équations de la dynamique vérifiés par les corps. Au niveau local nous avons les lois de contact qui mettent en relation des paires de nœuds portés par des contacteurs. Pour passer d'un niveau à l'autre nous avons les matrices H et H^* qui dépendent de la forme des zones de contact, de la discrétisation, etc.



Figure 7. relation entres variables globales et locales.

Les approches de résolution seront donc les suivantes :

- soit on cherche à résoudre le problème simultanément sur le niveau global et local. C'est l'approche employée par Alart & Curnier (1991),
- soit on résout au niveau global. C'est le principe des stratégies d'élimination ou de substitution,
- soit on résout au niveau local. C'est le principe des stratégies de condensation.
- Une fois l'approche de résolution choisie il reste à déterminer la méthode de résolution.

4.1. Approche globale, Approche locale

Le principe de l'approche globale consiste à résoudre le système linéaire composé de l'ensemble des inconnues globales tout en tenant compte des relations de contact.

• Partant de l'ensemble des systèmes d'équations de la dynamique des corps, discrétisés en espace et en temps, on peut assembler le système global:

$$IM (\dot{q}^+ - \dot{q}^-) = h r_{free} + h r$$

- La matrice *IM* est diagonale par bloc, chaque bloc ayant la taille du système d'équations définissant le mouvement de chaque corps. *r_{free}* représente le vecteur résidu libre, obtenu sans tenir compte de la contribution du contact, *h* est le pas de temps.
- A ce système d'équation vient se rajouter l'ensemble des relations de contact. L'obtention d'un système ne dépendant plus des variables locales est décrite dans Jean (1993) et ne sera donc pas reprise en détail ici. Le principe général est globalement le suivant. En tenant compte des relations cinématiques (matrices H) on élimine les variables cinématiques locales (g, U_T) pour ne conserver que les variables cinématiques globales (q, q). Ensuite on utilise le système global pour éliminer r de l'expression précédemment obtenue, ce qui nous donne un système d'inéquations ne

dépendant que de \dot{q} . Pratiquement ces inéquations peuvent être résolues avec n'importe quelle méthode de minimisation sous contrainte.

- D'un point de vue numérique, cette stratégie de résolution va permettre de construire différentes méthodes avec résolution directe ou itérative.
- Dans l'approche locale, on va venir condenser (explicitement ou numériquement) les équations de la dynamique au niveau des contacts. De ce fait la résolution va se faire en deux temps tout d'abord au niveau des relations de « contact » et ensuite une fois que toutes les relations sont vérifiées au niveau des corps. Pour la suite on suppose qu'on est capable de condenser le système global sous la forme suivante :

 $\mathbf{H}^* I M^{-1} \mathbf{H} h R - \mathbf{H}^* \dot{q}^+ = -\mathbf{H}^* (I M^{-1} h r_{\text{free}} + \dot{q}^-) \implies \mathbf{W} h R - U = -U_{\text{free}}$

• On peut aussi l'écrire sous forme d'équation :

$$U^{\alpha} = U^{\alpha}_{free} + \sum_{1}^{nc} w^{\alpha\beta} h R^{\beta}$$

• Comme précédemment on va pouvoir distinguer des méthodes conduisant à une résolution directe ou itérative. Pour avoir accès à certaines méthodes de minimisation sous contrainte il est nécessaire de reformuler le problème condensé (Jean (1993)) en y injectant les relations de « contact » ce qui va nous donner accès à un système d'inéquations ne dépendant que des réactions locales *R*.

5. Exemples de structures

On présente dans cette partie, trois structures réelles modélisées avec le code de calcul LMGC90. Les blocs sont considérés comme rigides.

5.1. Escalier Ridolfi

Les caractéristiques de cet escalier, nous ont été données par la faculté d'architecture de Bari. L'ouvrage, présenté à la 40° foire internationale de Vérone en 2005 sur les techniques nouvelles appliquées à la pierre, est monté à sec et armé avec des câbles en acier afin d'obtenir une précontrainte qui permette l'équilibre de la structure. Il veut contribuer à montrer la résolution de certains problèmes qui concernent l'emploi de la pierre dans l'architecture contemporaine.

• Contraintes et exigences

L'escalier est constituée de 20 marches. La loi de comportement, au niveau de l'interface entre les marches, est de type frottement sec de Coulomb, standard, avec un coefficient de frottement de 0.8.(A.Baudoin & al, 2006)

Pour simuler une précontrainte, on a inséré un ressort entre les marches (celui-ci modélise une raideur active en traction et inactive en compression).

Enfin, la première marche est encastrée sur un socle (la liaison est de type surface – surface, avec une très forte cohésion).

Pour une raideur k du ressort de l'ordre de 6,12MN/m, une pré-déformation de 0.05 et une force de pré-contrainte équivalente de l'ordre de 107kN, on obtient après 5000 itérations (pas de temps de 10^{-4} s) :



Figure 8. Représentation de la répartitionFigure 9. Représentation de la répartitiondes effortsdes vitesses des marches

La répartition des efforts au niveau de chaque marche est homogène, tous les blocs sont contraints de la même façon. Les vitesses des blocs sont de l'ordre de 10^{-5} m/s donc négligeables : la structure est stabilisée.

La prise en compte d'une précontrainte trop faible, ne permet pas d'assurer un équilibre de la structure qui se ruine de la manière présentée en figure 10.



Figure 10. Structure ruinée par défaut de précontrainte

5.2. Coupôle de Junas

Le client Régis Deltour, membre de l'Association des Compagnons Passants Tailleurs de Pierre, a proposé de participer à un projet de conception d'une coupôle en pierre. Ce projet rentre dans le cadre des Rencontres de la pierre de Junas qui rassemblent des tailleurs de pierre et des professionnels de la filière venus de France et d'Europe.

Contraintes et exigences

La structure est une voûte en pierre de huit mètres de diamètre et quatre mètres de hauteur, elle s'inscrit dans une demi-sphère. Elle comporte un trou au sommet d'un mètre de diamètre. Elle repose sur cinq piliers de deux mètres de hauteur, soixantedix centimètres de largeur et quarante centimètres d'épaisseur. Les blocs sont rigides et l'interface est de type contact frottant de coefficient 0.8. Une ceinture métallique est introduite au niveau des sommiers (modélisée par des ressorts entre les blocs) simulant une pré-contrainte.

Pour une raideur k du ressort de l'ordre de 2OMN/m, une pré-déformation de 0,05 et une force de pré-contrainte équivalente de l'ordre de 400kN, on obtient après 8000 itérations (pas de temps de 10^{-4} s) :



Figure 11. Représentation de la répartitionFigure 12. Représentation de la répartitiondes effortsdes vitesses dans les blocs

La répartition des efforts est homogène et symétrique au niveau des pieds de la coupôle. La vitesse des blocs est de l'ordre de 10^{-7} m/s donc négligeable : la structure reste stable.(pour plus de détail, on pourra se reporter à R.Péralès & al, 2005)

5.3. Pont Julien

La structure est constituée de 3267 blocs. La modélisation du pont Julien reprend la géométrie des blocs de la structure réelle (Dubois & al 2004, Chetouane 2004) L'interaction entre les blocs est de type frottement sec de Coulomb, avec une valeur du coefficient de 0.8. La structure est modélisée sous poids propre (aucune précontrainte).

Après 10000 pas de temps (pas de temps 10^{-4} s), la structure reste stable et la répartition des efforts est montrée ci-dessous :



Figure 13. Représentation de la répartition des efforts.

Les blocs représentés en jaune et vert sont ceux qui sont le plus chargés (les plus contraints).

Conclusions :

Les travaux actuellement en cours concernent l'optimisation des algorithmes de détection et traitement de contacts face-face des blocs rigides en trois dimensions. Ils permettent d'envisager le traitement de structures réelles sous sollicitations dynamiques, dans un proche avenir.

6. Références :

Abadie M. (1998), "Simulation dynamique de mécanismes. Prise en compte du contact frottant", Thèse de l'Université de Montpellier II.

Alart P., Curnier A. (1991), "mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods", Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 92, pp.353-375.

Baudoin A., Follenius N., Gregorowicz S. (2006), "Rapport d'étude : Escalier Ridolfi", Projet long de l'école des mines d'Alès.

Brogliato B., ten Dam A.A., Paoli L., Génot F., Abadie M. (2002), "Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanicals systems", Applied Mechanics Reviews 55(2), pp 107-150.

Cambou B., Jean M. (2001), "Micromécanique des matériaux granulaires", Hermes Sciences.

Chetouane B. (2004), "Approche combinée éléments finis/éléments discrets pour la modélisation des structures maçonnées", Thèse de l'Université de Montpellier II.

Cundall P.A., Strack O.D.L. (1979), "A discrete numerical model for granular assemblies", Géotechnique 29(1),pp 47-65.

Dubois D., Annarumma C., Desrez E., Louis D. (2002), "Rapport d'étude : Stabilité de structures discontinues en génie civil : application au Pont Julien", Projet long de l'école des mines d'Alès.

Jean M., Moreau J.J. (1992), "Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections", Proc. Contact Mechanics Int. Symp., Edt A. Curnier, pp 31-48.

Jean M. (1993), "Simulation numérique des problèmes de contact avec frottement", Journées de la Société Tribologique de France, Matériaux et Techniques **1-3**.

Jean M. (1999), "The non-smooth contact dynamics method » Computer methods in applied mechanics and engineering". Comput. methods appl. mech. eng., vol. 177, no 3-4, pp. 235 – 257.

Moreau J.J. (1988), "Unilateral contact and dry friction in finite d freedom dynamics", CISM Courses and Lectures, 302 Springer-Verlag, pp 1-82.

Moreau J. J. (1994), « Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials », Eur. J. Mech. A/solids, 13(4-suppl.), 93-114.

Moreau J. J. (1997), "Numerical investigation of shear zones in granular materials", Proc. HLRZ-Workshop on friction, Arching, Contact Dynamics, World Scientific, Singapore, pp233-247, (Grassberger, P. et Wolf, D. eds).

Moreau J. J. (2000), « Contact et frottement en dynamique des systèmes de corps rigides ». Revue Européenne des Eléments Finis, 9, 9-28. (in French).

Péralès R., Vinches M., Bohatier C. (2005), "ERP en pierre massive. Apport des modélisations discontinues". VII^{ème} rencontre de l'APS.