
Caractérisation thermique d'un échantillon de béton par impédance thermique en utilisant la théorie des modèles d'ordre non entiers

A. Chauchois - D. Defer - E. Antczak

LAMTI (Laboratoire d'Artois Mécanique Thermique Instrumentation), FSA - Université d'Artois, TECHNOPARC FUTURA, 62400 BETHUNE, FRANCE
e-mail : alexis.chauchois@fsa.univ-artois.fr, defer@univ-artois.fr, antczak@univ-artois.fr

RESUME. Une méthode d'estimation de l'impédance thermique à partir du formalisme des modèles d'ordres non entiers est développée. Un système composé d'un capteur de flux et température sur un matériau en condition limite semi infini est étudié. La forme théorique de l'impédance qui prend en compte la capacité du capteur et la résistance de contact met en évidence des ordres fractionnels dans le modèle de comportement. La technique d'identification est appliquée à un échantillon de béton en exploitant des signaux pseudo aléatoires.

ABSTRACT. A method is developed for estimating thermal impedance based on the formalism of non-integer order models. System consisting of a flux and temperature sensor on a material in a semi-infinite boundary condition is studied. The theoretical form of the impedance that takes into account the capacity of the sensor and the contact resistance reveals fractional orders in the behaviour model. A technique for identifying the thermophysical parameters is proposed and applied to a sample of concrete by exploiting pseudo-random signals

MOTS CLES : impédance thermique, modèle d'ordres non entiers, effusivité, résistance de contact, fluxmètre.

KEYWORDS : impedance, non integer model, effusivity, contact resistance, fluxmeter.

1. Introduction

Dans le cadre du suivi de l'état de vieillissement ou de dégradation d'une structure en béton, il peut s'avérer très intéressant d'étudier l'évolution de ses paramètres thermophysiques (conductivité thermique, chaleur massique, effusivité ou diffusivité). En effet, ces derniers sont liés à la variation de porosité du milieu étudié, ainsi qu'à sa teneur en eau.

Pour déterminer les propriétés thermophysiques de matériaux, différents types de sondes ont été imaginés et développés, avec des géométries variables mais la démarche d'identification est globalement identique. Néanmoins ces méthodes ne permettent pas d'envisager des signaux trop mal maîtrisés et encore moins des signaux aléatoires. Elles ne sont donc pas adaptées aux applications in situ où les conditions limites ne sont pas contrôlables. Quant au contact, sa valeur change d'un essai à l'autre et ses variations entraînent des erreurs d'estimation sur les paramètres thermophysiques du matériau. Pour des matériaux à surface rugueuse comme le béton par exemple, la résistance de contact devient importante et elle a une forte influence sur les échanges.

Dans ce travail, une nouvelle technique de détermination de l'impédance thermique issue de la théorie des modèles d'ordres non entiers est introduite. Le modèle théorique peut directement servir à l'estimation de l'impédance expérimentale et ne nécessite donc que quelques paramètres. Le modèle théorique est fonction de l'effusivité thermique du matériau et prend également en compte la capacité thermique du capteur et la résistance de contact qui est identifiée à chaque essai. La validité du modèle est discutée en réalisant une étude harmonique et la méthode est appliquée à un échantillon de béton.

2. Dispositif expérimental et modélisation de l'impédance thermique

L'impédance thermique (Defer *et al.*, 1998) est une grandeur complexe, définie dans le domaine fréquentiel comme le rapport des spectres de température et de flux. Dans le domaine fréquentiel, on définit l'impédance Z par :

$$Z(f) = \frac{\theta(f)}{\phi(f)} \quad [1]$$

Le principe expérimental permettant de calculer l'impédance thermique apparente de la face d'accès d'un matériau consiste à placer un capteur de flux et de température sur l'échantillon à tester (Figure 1).

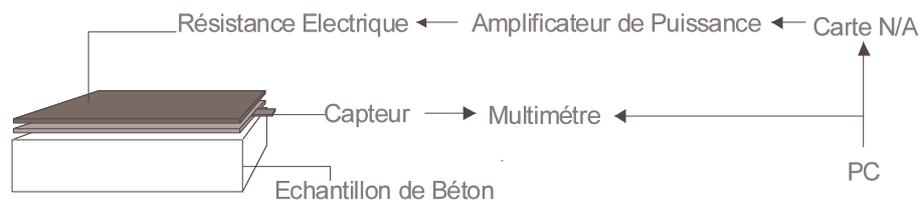


Figure 1. Procédé expérimental

Le capteur est un fluxmètre à gradient tangentiel (Hérin *et al.*, 1993) de 0,5 mm d'épaisseur dans lequel la mesure de température est assurée par un thermocouple de type T intégré. Le système dont on détermine l'impédance est un tricouche comprenant une partie du capteur de capacité C_f (J/K.m²) à l'entrée du système, la résistance de contact R_c (K.m²/W) à l'interface capteur-matériau, ainsi que le matériau en condition limite semi infinie caractérisé par son effusivité thermique b (J/K.m².s^{1/2}).

Le système tricouche peut être schématisé de la façon suivante. En utilisant le formalisme des quadripôles thermiques, on peut associer une matrice de transfert au capteur et la résistance de contact.

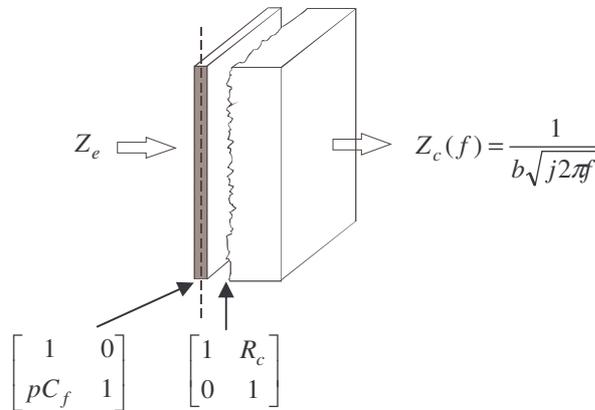


Figure 2. Capteur

Le milieu à caractériser intervient sous la forme d'une condition limite de type semi-infinie. Il présente alors une impédance caractéristique Z_c :

$$Z_c(f) = \frac{1}{b\sqrt{j2\pi f}} \quad [2]$$

Le paramètre b [J.K⁻¹.m⁻².s^{-1/2}] représente l'effusivité thermique du matériau. Ce paramètre définit l'aptitude du matériau à absorber. Cette grandeur thermique est fondamentale : elle caractérise entièrement le comportement du système.

Le produit des matrices de transfert permet d'aboutir à l'expression de l'impédance Z du système dans le domaine fréquentiel.

$$Z(f) = \frac{1 + bR_c(j2\pi f)^{1/2}}{b(j2\pi f)^{1/2} + j2\pi f C_f + bR_c C_f (j2\pi f)^{3/2}} \quad [3]$$

L'impédance n'est qu'un cas particulier de la fonction de transfert définie dans le domaine de Laplace. Soit :

$$Z(f) = \frac{1 + bR_c p^{1/2}}{bp^{1/2} + pC_f + bR_c C_f p^{3/2}} \quad [4]$$

La fonction de transfert a la forme suivante :

$$Z(p) = \frac{\beta_1 + \beta_2 \cdot p^{1/2}}{\alpha_1 \cdot p^{1/2} + \alpha_2 \cdot p + \alpha_3 \cdot p^{3/2}} \quad [5]$$

Le modèle met en évidence une relation linéaire entre les grandeurs temporelles d'entrée (densité de flux $\phi(t)$) et de sortie (température $\theta(t)$) sous la forme d'une équation différentielle où les ordres de dérivation sont fractionnels (Oustaloup 1995).

$$\alpha_1 D^{1/2} \theta(t) + \alpha_2 D \theta(t) + \alpha_3 D^{3/2} \theta(t) = \beta_1 \cdot \phi(t) + \beta_2 D^{1/2} \phi(t) \quad [6]$$

Dans cette expression, les termes D^n représentent les dérivées généralisées qui peuvent être calculées à partir des équations de récurrence suivantes :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n_\alpha} \theta(t) = \frac{1}{h^{n_\alpha}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_\alpha}{k} \theta(t - kh) \quad [7]$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n_\alpha} \phi(t) = \frac{1}{h^{n_\alpha}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{n_\alpha}{k} \phi(t - kh) \quad [8]$$

avec

$$\binom{n_\alpha}{k} = \frac{n_\alpha (n_\alpha - 1) \cdots (n_\alpha - k + 1)}{k!} \quad [9]$$

Dans ces expressions, h désigne la période d'échantillonnage et n_α l'ordre de dérivation.

A partir de l'équation (6), les enregistrements des évolutions de la densité de flux et de la température de surface permettent de mettre en place un système d'équations où les coefficients α_i et β_j sont les paramètres inconnus. Par changement de variables (Battaglia *et al.*, 2000), ce système peut être transcrit sous une forme linéaire. Les coefficients α_i et β_j sont obtenus par inversion matricielle. Ils permettent alors de tracer l'impédance expérimentale qui peut être approximée par celle théorique pour déterminer les paramètres thermophysiques du modèle et en particulier l'effusivité b du matériau étudié.

3. Phase de validation du modèle et du traitement

3.1. Caractérisation préalable de l'échantillon

La caractérisation a été réalisée sur un échantillon de béton. Il s'agit du cas typique où la rugosité de surface entraîne des résistances de contact élevées jusqu'à plusieurs $10^{-2} \text{ K.m}^2.\text{W}^{-1}$. Le matériau est par nature hétérogène mais les dimensions du capteur permettent d'intégrer les hétérogénéités et de le considérer homogène. Une étude du transfert à travers l'échantillon a permis de déterminer une valeur de conductivité de référence. Cette étude a été menée de façon classique dans un banc de conduction. Dans ce même dispositif, l'analyse d'un processus de stockage a conduit à mesurer sa capacité thermique. Ces mesures préalables ont permis de déduire une valeur de référence de l'effusivité à partir de la relation :

$$b = \sqrt{\lambda \rho c} \quad [10]$$

où λ est la conductivité thermique et ρc la chaleur spécifique. Les résultats sont présentés dans le tableau 1.

Conductivité thermique ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)	1.94
Chaleur spécifique ($\text{J.K}^{-1}.\text{m}^{-3}$)	$3.9 \cdot 10^6$
Effusivité ($\text{J.K}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{s}^{-1/2}$)	$1.76 \cdot 10^3$

Tableau 1. Résultats obtenus sur l'échantillon de béton.

3.2. Phase de validation du modèle

Pour estimer l'impédance expérimentale, on retient un modèle présentant les mêmes ordres de dérivation que l'expression théorique et on détermine les coefficients α_i et β_j à partir des mesures. Afin de valider le modèle théorique, nous avons procédé à une estimation de l'impédance par étude harmonique. La détermination de fonction de transfert par étude harmonique permet de tracer l'impédance point par point au prix d'essais longs mais le résultat obtenu fait office de référence.

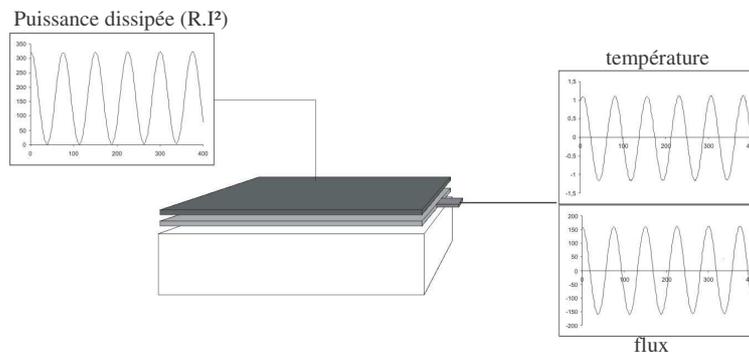


Figure 3. Procédure expérimentale

Le rapport de l'amplitude de la composante harmonique de la température sur celle du flux donne la valeur du module de l'impédance Z pour la fréquence de sollicitation et le déphasage donne l'argument Z .

Le tableau 2 montre les résultats obtenus pour diverses fréquences étudiées. La gamme de fréquences testées correspond à la bande spectrale ciblée dans la suite du travail lors de la caractérisation sous sollicitations pseudo aléatoires :

Fréquence (Hz)	0,005	0,00568	0,00666	0,00793	0,01	0,0125
Module (K.m ² /W)	0,0077	0,0076	0,007	0,0066	0,0062	0,0058

Tableau 2. Modules de l'impédance issus de l'étude harmonique aux différentes fréquences étudiées

L'identification des paramètres thermophysiques du modèle théorique est réalisée par la minimisation d'une fonction d'écart entre les points expérimentaux et ceux issus de la courbe théorique au sens des moindres carrés. Comme l'impédance est une fonction non linéaire des paramètres, l'approximation est obtenue à l'aide d'un algorithme itératif, la méthode du simplexe (Lagarias *et al.*, 1998). Les valeurs initiales des paramètres thermophysiques injectées dans l'algorithme étaient suffisamment proches des valeurs du système et ont évité tout problème de divergence ou de minimum local.

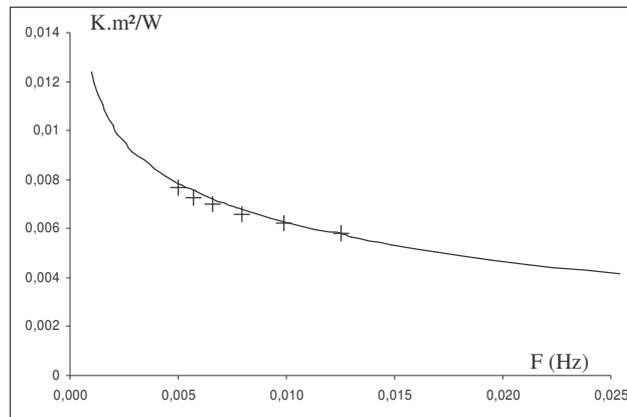


Figure 4. Comparaison du module de l'impédance et des valeurs trouvées par étude harmonique

Sur la figure 4, sont représentés les points issus de l'étude harmonique ainsi que la courbe optimisée d'impédance. On constate une très bonne qualité d'approximation. La courbe théorique est obtenue pour les valeurs de paramètres thermophysiques suivants.

<i>Résistance de contact ($W.m^{-2}.K^{-1}$)</i>	<i>0,0056</i>
<i>Capacité du capteur ($J.K^{-1}.m^{-2}$)</i>	<i>950</i>
<i>Effusivité ($J.K^{-1}.m^{-2}.s^{-1/2}$)</i>	<i>$1.72 \cdot 10^3$</i>

Tableau 3. Paramètres thermophysiques issus de l'étude harmonique

La valeur de l'effusivité est très proche de celle obtenue lors des essais préliminaires. La bonne concordance de la valeur thermophysique ainsi que la bonne superposition des points expérimentaux et de la courbe théorique incitent à valider le modèle théorique.

L'impédance expérimentale de ce même système a ensuite été estimée suivant la méthode définie précédemment basée sur utilisation des modèles non entiers de paramètres α_i et β_j . Pour ne pas modifier les conditions expérimentales, le dispositif n'a subi aucune intervention entre les deux phases d'essai. De ce fait, les conditions de contact sont restées inchangées afin de garantir une valeur constante de résistance de contact.

L'alimentation de la résistance s'effectue en tout ou rien de telle façon que la puissance de sollicitation est dissipée sous la forme un signal binaire pseudo aléatoire (assimilable à des processus aléatoires). Les figures 5 et 6 montrent les variations de la densité de flux et de la température de surface mesurées pour un essai réalisé sous sollicitations pseudo aléatoires :

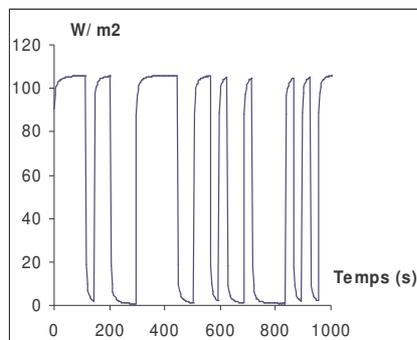


Figure 5. Signaux de densité de flux d'un essai de caractérisation sous sollicitations aléatoires

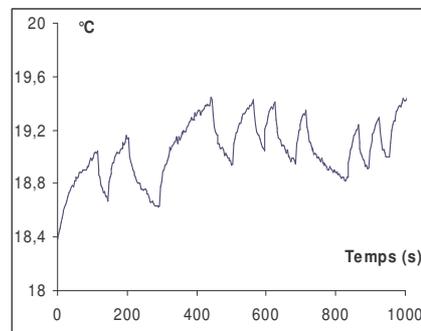


Figure 6. Signaux de température d'un essai de caractérisation sous sollicitations aléatoires

La mise en équations des données temporelles de flux et de température conformément à l'équation 6 a permis d'estimer les paramètres α_i et β_j du modèle. Pour cet essai, les valeurs suivantes ont été déterminées :

Paramètres	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2
Valeurs	0.181234	0.118043	1	0.000097	0.001088

Tableau 4. Valeurs des paramètres du modèle α_i et β_j estimés à partir de l'équation 6 pour ce test

Les valeurs ont été injectées dans l'expression de l'impédance. Le résultat est tracé sur la figure 7.

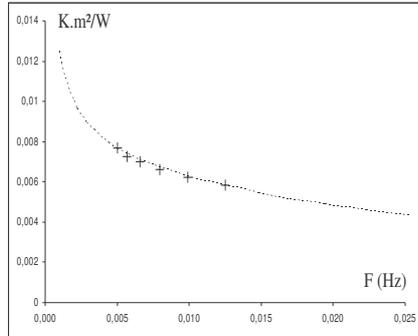


Figure 7. Comparaison du module de l'impédance à partir du modèle d'ordres non entiers et des valeurs trouvées par étude harmonique

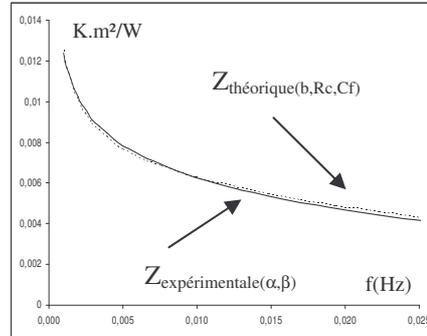


Figure 8. Résultat de l'optimisation de l'impédance théorique (b, R_c, C_f) sur l'impédance expérimentale (α, β)

La figure 8 montre que le traitement permet d'obtenir une impédance conforme aux résultats de l'étude harmonique. Une approximation de l'impédance expérimentale par l'impédance théorique a donné des valeurs de paramètres très proches des valeurs précédentes avec en particulier une valeur d'effusivité $b = 1.73 \cdot 10^3 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1/2}$.

4. Résultats sur une série d'essais

La procédure de détermination des paramètres à partir du modèle d'ordre non entiers a été appliquée à une série de 10 essais. Entre les différents essais, le capteur a été enlevé puis replacé sur la surface du matériau de manière à modifier les conditions de contact.

essais	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$b \cdot 10^3 (\text{J.K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1/2})$	1,73	1,82	1,81	1,83	1,78	1,82	1,71	1,79	1,81	1,86
$R_c \cdot 10^{-3} (\text{W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1})$	5,7	4,2	4,8	5,3	5,7	5,5	2,9	6,1	3,3	4,2
$C_f \cdot 10^2 (\text{J.K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})$	9,7	9,6	9,5	9,8	9,5	9,5	9,3	9,6	9,7	9,7

Tableau 5. Résultats de l'application de la procédure pour la détermination des paramètres à partir d'un ordre non entier sur une série de 10 essais

Les valeurs d'effusivité obtenues présentent une bonne répétabilité alors que la résistance varie fortement.

Valeur moyenne de l'effusivité $\cdot 10^3 (J.K^{-1}.m^{-2}.s^{-1/2})$	1,8
Ecart type $\sigma \cdot 10^3 (J.K^{-1}.m^{-2}.s^{-1/2})$	0,046
Coefficient de variation Cv (%)	3,5

Tableau 6. Résultats statistiques pour une série de 10 essais

5. Conclusion

L'étude a montré qu'il était possible d'utiliser la théorie des modèles d'ordres non entiers pour déterminer expérimentalement l'impédance thermique d'un système de conduction. Dans le modèle théorique d'impédance défini, où apparaissent des ordres de dérivation non entiers, la résistance de contact et la capacité du capteur utilisé pour les mesures ont été intégrées. Le modèle a été validé par une étude harmonique. En utilisant des sollicitations pseudo aléatoires, les paramètres de ce modèle ont été déterminés à partir des mesures de flux et de température. Il est alors possible d'accéder directement à l'impédance dans le domaine fréquentiel. Une procédure d'identification a permis de déterminer l'effusivité thermique d'un matériau et la résistance de contact. Plusieurs essais ont été réalisés en faisant changer les conditions de contact. La méthode a été appliquée avec succès à un échantillon de béton pour lequel la résistance de contact est particulièrement élevée.

Des études sont actuellement en cours pour appliquer cette technique in situ sous sollicitations aléatoires naturelles car dans ce cas le spectre des sollicitations est moins riche.

6. Bibliographie

- Defer D, Antczak E, Duthoit, « The characterisation of thermophysical properties through thermal impedance under random solicitations taking sensor-induced disturbance into account », *Measurement Science and Technology* 3-9 496-504, 1998
- Hérin P, Théry, « Measurements on the thermoelectric properties of thin layers of two metals in electrical contact. Application for designing new heat flow sensor », *J Meas. Sci. Technol.* 3 158 – 163, 1993
- A. Oustaloup, *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*, Editions Hermès, Paris, 1995
- J.L. Battaglia, L. Le Lay, J.C. Batsale, A. Oustaloup, O. Cois, « Utilisation de modèles d'identification non entiers pour la résolution de problèmes inverses en conduction », *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 39, pp. 374-389, 2000
- J.C. Lagarias, J.A. Reeds, M.H. Wright, P.E. Wright, « Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions », *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 9, pp. 112-147, 1998