Modélisation numérique du comportement d'un milieu poreux consolidé exposé au gel

G. WARDEH* and B. PERRIN^{*}

*Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions (LMDC) INSA Génie Civil, 135 Av de Rangueil 31077 Toulouse Cedex 04, France.

RESUME. Ce papier résume les bases physiques du modèle hydromécanique dont les éléments constitutifs sont les équations de conservation de masse de la matrice solide, de l'eau et de la glace. Les lois de comportement de ces trois phases, l'utilisation du modèle de Biot pour les milieux poreux, de la loi de Darcy permettent de faire le couplage entre les déformations du milieu et les pressions de différentes phases. L'écriture de l'équilibre mécanique permet d'exprimer le système d'équations dont la résolution conduit à la connaissance des évolutions spatio-temporelles des contraintes et des déformations. La formulation physique présente l'intérêt d'exprimer le terme de pression hydrostatique lié à la présence des phases dans le volume poreux, sous la forme d'une pression liquide et d'un terme de pression supplémentaire que l'on peut exprimer à partir de la répartition porométrique. Le code a été mis en œuvre afin de tester sa capacité à reproduire les déformations observées sur des tuiles soumises à des cycles de gel-dégel. Le model ne permet pas encore de bien reproduire les déformations expérimentales. L'importance des conditions aux limites est cependant mis en évidence.

ABSTRACT: This paper summarizes the physical basis of a hydro-mechanical model whose components are the mass conservation equations of the solid matrix, water and ice. The constitutive laws of these three phases, used of with Biot's model and Darcy's law for porous media, allow the strains of the medium and the various phase pressures to be coupled. The mechanical equilibrium equation leads to the final system of equations, the resolution of which gives the space and time variations of the stresses and strains. The interest of the physical formulation is to provide an expression for the hydrostatic pressure related to the presence of the phases in the porous volume, in the form of a liquid pressure and an additional term which can be deduced from the pore size distribution. The numerical code was implemented to test the capacity of this model to describe the strains observed in tiles subjected to freeze/thaw cycles. At present the model does not correctly reproduce the experimental strains. The importance of the boundary conditions is, however, highlighted.

MOTS-CLES: Gel dégel, Modélisation, Pression poreuse, Terre cuite, Distribution poreuse.

KEYWORDS: Freezing thawing, Modelling, Porous pressure, Baked clay, Pore size distribution.

1. Introduction

Un milieu poreux, complètement ou partiellement saturé en solution liquide et exposé à des températures inférieures au point de congélation est soumis à la fois à des efforts purement thermiques ainsi qu'aux effets liés à la formation de glace au sein de sa porosité.

La formation de la glace dans le réseau poreux est un processus complexe étant donné la grande variété de taille des pores, la pureté de la solution interstitielle et la présence probable de trois phases (gazeuse, liquide et solide).

Afin d'expliquer les détériorations des milieux poreux causées par le gel, et plus particulièrement le béton, plusieurs explications ont été proposées (Litvan 1975; Litvan 1976; Powers 1949; Powers and Helmuth 1953). Aucune ne permet de décortiquer tous les résultats retrouvés expérimentalement (Beaudoin and Mac Innis 1974; Everett 1961) mais elles permettent d'avoir une idée des mécanismes.

Cette étude s'inscrit dans une tentative globale de prédire quantitativement la réponse d'un milieu en déformation à une sollicitation thermique de type de gel. Cet objectif nécessite la mise au point d'un modèle basé sur une mise en équation des différents mécanismes mis en jeu lors de la formation de la glace. En plus, un tel modèle permettra d'étudier l'influence des caractéristiques mécaniques et du transport liquide sur le comportement observé et par conséquent la durabilité du matériau étudié.

Le modèle développé par Zuber (Zuber 2002; Zuber and Marchand 2000; Zuber and Marchand 2004) qui cherche à retrouver les déformations macroscopiques à partir de la simple connaissance de la répartition porométrique du matériau a été pris en compte.

Le but est, dans un premier temps, d'étudier l'influence des paramètres physiques d'un matériau type tels que la porosité, la perméabilité et le module d'élasticité, et dans en seconde temps de discuter la validité de ce modèle pour prévoir le comportement d'un matériau à base d'une terre cuite.

En fait, le problème de la modélisation du comportement au gel d'un matériau poreux est multi-échelles. Les phénomènes doivent être appréhendés à la fois à

l'échelle des pores ainsi qu'à l'échelle du matériau supposé homogène. A l'échelle des pores l'équilibre entre les phases de la solution interstitielle est décrit à partir des concepts de la thermodynamique classique. Le matériau est considéré comme un milieu poreux continu saturé.

Finalement, la relation entre les mécanismes de transfert et le comportement mécanique sera étudiée dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

2. Formation de la glace dans un milieu poreux saturé en solution liquide

2.1 Equilibre mécanique de phases en milieu poreux

Lorsqu'un cristal est immergé dans son liquide, les deux phases sont séparées par une interface ayant une courbure $k_{ls} = (\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})$, n, r_2 étant les rayons de courbure principaux de cette interface. La différence de pression entre les deux phases impose l'existence d'une tension de surface non nulle.

Les conditions d'équilibre mécanique sont exprimées par la loi de Laplace qui s'écrit:

$$P_{s} - P = g_{ls} k_{ls} \tag{1}$$

2.2 Description thermodynamique de la formation de la glace

La formation de glace au sein des matériaux poreux est influencée par la taille des pores qui conditionnent la température de stabilité des cristaux. Cette température de stabilité, qui est la température au-dessus de la quelle le cristal ne peut exister, est souvent assimilée à la température de formation de ce même cristal (Brun et al. 1973; Brun et al. 1977; Defay and I.Prigogine 1951; Everett 1961).

Les conditions d'équilibre entre les trois phases pouvant exister dans la porosité d'un matériau sont influencées par les courbures de leurs interfaces, la présence ou l'absence des espèces solides dans la solution et, par la pression appliquée sur les phases. La relation de Gibbs-Duhem exprimant, dans le cas général, les équilibres thermodynamiques entre phases s'écrit:

$$\Delta s^{ls} dT - (v^s - v^l) dp_s - v^l d(\mathbf{g}_{ls} k_{ls}) + RT. d(\ln a_w) = 0$$
⁽²⁾

avec Δs^{ls} l'entropie molaire de fusion de la glace, v^s, v^l les volume molaire de la glace et de l'eau respectivement. R le constant des gaz parfaits et a_w l'activité de l'eau.

L'influence de la pression sur la température de stabilité pouvant être négligée aussi bien que le degré de pureté de l'eau (Bejaoui 2001; Zuber and Marchand 2004), la relation (2) se réduit à la forme simplifiée suivante:

$$\Delta s^{ls} dT - v^l d(\mathbf{g}_{ls} k_{ls}) = 0 \tag{3}$$

L'intégration de cette relation entre une interface plane et une interface de courbure k_{ls} mène à

$$\frac{1}{k_{ls}^{eq}} = \frac{g_{ls}}{\int_{\overline{h}} \frac{\Delta s^{ls}}{v^l} dT}$$
(4)

On s'intéresse dans cette relation au rayon plutôt qu'à la courbure en tenant compte de la forme de l'interface. La relation (4) alors s'écrit

$$R_{eq} = \frac{f \mathbf{g}_{ls}}{\int\limits_{T_0}^{T} \frac{\Delta s^{ls}}{\nu^l} dT}$$
(5)

où f est un facteur de forme égale à 2 lors du gel, l'interface étant de forme sphérique et à 1 lors de la fusion l'interface ayant une forme cylindrique (Scherer 1993).

Le terme $\int_{T_0}^{T} \frac{\Delta s^{lc}}{v_l} dT$ doit être intégré entre la température du point triple et la

température considérée, en tenant compte de la dépendance de l'entropie à la température et aux pressions des phases.

Si on prend en compte l'épaisseur du film non gelé, d, (Fagerlund 1973) le rayon de pore R_p dans lequel le cristal de glace existe est donné par:

$$R_p = R_{eq} + \boldsymbol{d} \tag{6}$$

Plusieurs auteurs (Brun et al. 1977; Matala 1995) ont proposé des relations reliant la température de formation de la glace au rayon de pore, telles que:

$$R_{pn} = 0.584 + 0.0052 \, \boldsymbol{q} - \frac{63.46}{\boldsymbol{q}}$$
 (Matala (1995) congélation f=2) (7)

$$R_{pf} = 0.757 + 0.0074 \, \boldsymbol{q} - \frac{33.45}{\boldsymbol{q}} \quad (\text{Matala (1995) fusion f=1}) \tag{8}$$

 $q = T - T_0$

L'illustration graphique de ces résultants est représentée à la figure 1.



Figure 1 : Variation de R_{eq} en fonction de la température

2.3 Prédiction de la formation de la glace à partir de la répartition porométrique.

Considérons un milieu saturé dont la répartition porométrique est connue, Si n est la porosité du matériau, on peut écrire

$$n = \lim_{r \to a} \int_{\infty}^{r} \frac{d\mathbf{j}}{dr} dr \tag{9}$$

 $\mathbf{j}(r)[m^3/m^3]$ est le volume cumulé des pores dont le rayon est supérieur à r, rapporté à l'unité de volume du milieu.

La formation de la glace peut être prédite théoriquement à partir de la répartition porométrique (Zuber and al 2000; Zuber and Marchand 2000). Le volume de la glace formé à chaque instant dans le réseau poreux correspond alors au volume des pores concernés, auquel il faut retrancher la partie encore adsorbée à la température considérée. Le volume de solution interstitielle, non adsorbée, dans les pores dont la taille est comprise entre r_1 , r_2 vaut:

$$\Delta_1^2 V_g = \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\mathbf{j}}{dr} \underbrace{(1 - \frac{\mathbf{d}}{r})^2}_{r} dr \tag{10}$$

g(r,T) est une fonction qui tiens compte de volume d'eau adsorbé.

2.4 Interaction glace parois des pores: pression de disjonction.

Ce phénomène peut être compris en considérant la croissance du cristal dans un pore (Scherer 1993; Scherer 1999; Zuber and al 2000; Zuber and Marchand 2004).

Considérons un cristal situé dans un gros pore de rayon r. connecté à un autre pore de rayon plus petit (figure 2). A l'équilibre le cristal est stable et il n'a tendance ni à croître ni à fondre (Scherer 1993).

En abaissant la température le cristal croit jusqu'à ce qu'il remplisse le pore. Dès lors, il peut être supposé que la pression dans le cristal est contrôlée par l'interface solide-liquide (Scherer 1999; Zuber and Marchand 2004) et donc la relation (1) est applicable avec $k_{ls}=k_{eq}$.

Afin de maintenir l'équilibre mécanique à l'interface couche adsorbée-cristal (figure 2), les parois du pore exercent une pression p_r (Scherer 1999) telle que

$$P_s = \boldsymbol{p}_r + k(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{d}) \, \boldsymbol{g}_{ls} \tag{11}$$

La pression dans le cristal devant être uniforme (Scherer 1993), les relations 1 et 11 permettent d'écrire

$$\boldsymbol{p}_r = \boldsymbol{P}_l + \boldsymbol{g}_{ls}(k_{eq} - \boldsymbol{k}(r - \boldsymbol{d})) \tag{12}$$

avec k_{eq} courbure de l'interface solide-liquide à l'entrée du pore.

Si l'on considère que l'interface à l'entrée des pores non gelés est sphérique et que les pores sont cylindriques, la pression du fluide qui s'exerce sur les parois d'un pore gelé vaut

$$\boldsymbol{p}_r = \boldsymbol{P}_l + \boldsymbol{C}(r) \tag{13}$$

$$\boldsymbol{c}(r) = \boldsymbol{g}_{ls} \left(\frac{2}{R_{eq}} - \frac{1}{r - \boldsymbol{d}} \right) \tag{14}$$

Cette pression est maximum si $\frac{1}{r-d} \approx 0$, soit dans les pores de grandes tailles. On peut remarquer que si un grand pore est connecté à plusieurs pores de tailles différentes, la pression maximale sera déterminée par le rayon du plus petit pore.

2.5 La pression poreuse.

La pression dans la porosité n'est pas homogène selon que les pores sont gelés ou non, elle est même variable en fonction de la taille de pore considéré. Cependant, à l'échelle du milieu poreux continu, cette pression n'intervient qu'au travers d'une valeur unique P^p . Cette pression peut être estimée comme une pression poreuse moyenne sur le volume élémentaire représentatif (Zuber and al 2000).

A l'échelle du VER, chaque pression est pondérée par la fraction volumique de phase dans laquelle elle est générée. Si l'on écrit

$$P^{p} = \sum_{VER} P_{r} \frac{V_{r}}{V_{P,VER}}$$

$$\tag{15}$$

 v_r est le volume des pores de rayons r dans lesquels une pression P_r est développée, $V_{P,VER}$ le volume poreux total du VER.

Sachant que $\frac{v_r}{V_{P,VER}} = \frac{d\mathbf{j}}{dr} dr$, la pression poreuse moyenne peut donc être exprimée

par la relation

$$P^{p} = \frac{1}{n} \int_{\infty}^{0} P_{r} \frac{d\mathbf{j}}{dr} dr$$
⁽¹⁶⁾

La présence de la glace dans un pore conduit à générer une pression $P_r = \mathbf{p}_r$ sur les parois. Si le pore n'est pas gelé $P_r = P_l$, on peut donc écrire

$$P^{p} = \frac{1}{n} \int_{R_{p_{eq}}}^{0} P_{l} \frac{d\mathbf{j}}{dr} dr + \frac{1}{n} \int_{\infty}^{R_{p_{eq}}} \mathbf{p}_{r} \frac{d\mathbf{j}}{dr} dr$$

$$\tag{17}$$



Figure 2 : Cristal dans un pore de rayon r connecté à un pore cylindrique.

$$\frac{1}{n} \int_{R_{peq}}^{0} P_l \frac{d\mathbf{j}}{dr} dr \text{ est la contribution des pores non gelés dans } P^p, \text{ tandis que}$$
$$\frac{1}{n} \int_{\infty}^{R_{peq}} \mathbf{p}_r \frac{d\mathbf{j}}{dr} dr \text{ est celle des pores dans lesquels la glace est formée.}$$

On peut remarquer que p_r n'est différent de P_l que si $c(r,T)\neq 0$, et donc si $r > R_{eq}$, et finalement on a

$$P^{p} = P_{l} + \underbrace{\frac{1}{n} \int_{\infty}^{R_{peq}} \mathbf{c}(r,t) \frac{d\mathbf{j}}{dr} dr}_{X(T)}$$
(18)

Le terme X(T) correspond alors à la pression supplémentaire apportée par la présence de la glace.

La pression P^p apparaissant dans l'équilibre mécanique du point matériel de la mécanique de milieu poreux continu est maintenant définie explicitement. Elle est la somme, à chaque instant, de la pression liquide et d'un terme relié à la présence de la glace dans les pores gelés.

3. Comportement mécanique d'un milieu poreux saturé

Les équations classiques de la poroélasticité d'un milieu poreux isotrope saturé ont été développées par Biot (Biot 1941). La proposition fondamentale de la mécanique du milieu poreux est de considérer que les contraintes exercées sont reprises en partie par la matrice solide et, en partie par la phase remplissant le volume poreux (Biot 1941; Selvadurai and Nguyen 1995).

Si **s** représente le tenseur des contraintes totales, P^p la pression poreuse, le principe des contraintes effectives permet d'écrire

$$\mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot -b\mathbf{i}P^p \tag{19}$$

avec **s**' le tenseur des contraintes effectives, $\mathbf{i}^{T} = [1,1,1,0,0,0]$ le symbole de Kronecker **d** sous forme vectorielle. Le paramètre b est appelé le coefficient de Biot. $b=1-\frac{K_0}{K_m}$, K_0, K_m étant les modules de compressibilité du matériau poreux drainé (squelette poreux) et de la matrice solide.

La réponse du milieu aux contraintes est la déformation du squelette poreux et celle du fluide. Les déformations du squelette sont représentées par le tenseur des déformations donné par la relation $\boldsymbol{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

où *Ui* est le composant du champ de déplacement du squelette poreux.

Le comportement élastique linéaire du milieu drainé (squelette poreux) est décrit par la loi classique de Hooke. La relation constitutive de la contrainte totale s'écrit sous la forme (Biot 1941; Selvadurai and Nguyen 1995).

$$\boldsymbol{s}_{ij} = 2G\boldsymbol{e}_{ij} + \boldsymbol{d}_{ij}(\boldsymbol{I} \boldsymbol{e}_{kk} - \boldsymbol{a}_0 K_0 T - bP^p)$$
⁽²⁰⁾

G, I sont les constantes de Lamé données par les relations $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$,

$$I = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)}$$

E, v sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson

a⁰ est le coefficient de dilatation volumique du matériau drainé.

L'équilibre statique pour les milieux continus s'écrit

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}_{ij}}{\partial x_i} + f_i = 0 \tag{21}$$

 f_i vecteur de force de volume.

La substitution de la relation 20 dans la relation 21 donne

$$2G\frac{\partial \boldsymbol{e}_{ij}}{\partial x_j} + \boldsymbol{I}\frac{\partial \boldsymbol{e}_{jj}}{\partial x_i} - \boldsymbol{a}_0 K_p \frac{\partial T}{\partial x_i} - \boldsymbol{b}\frac{\partial P^p}{\partial x_i} + f_i = 0$$
(22)

où bien en terme de déplacement

$$2G\frac{\partial^{2}u_{i}}{\partial x_{j}\partial x_{j}} + (G+I)\frac{\partial^{2}u_{j}}{\partial x_{i}\partial x_{j}} - a_{0}K_{p}\frac{\partial T}{\partial x_{i}} - b\frac{\partial P^{p}}{\partial x_{i}} + f_{i} = 0$$
(23)

La relation précédente contient deux inconnues supplémentaires, la température et la pression poreuse. Ces inconnues seront obtenues par les équations de conservation de masse et d'énergie.

4. Conservation de la masse et équations d'état des différentes phases

La résolution de l'équation de l'équilibre mécanique, (23), nécessite une équation scalaire supplémentaire. Cette équation va être fournie par les conditions de conservation de la masse de différentes phases présentes dans le système étudié. L'équation bilan de conservation de masse est de la forme

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} + \nabla(\boldsymbol{r}V) = \boldsymbol{r} \tag{24}$$

r masse volumique, V vitesse, r est un terme source de masse. $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$.

4.1 La matrice solide

Dans le VER, la matrice solide est le complément de la porosité, sa fraction volumique est donc (1-n). Sa masse volumique sera notée \mathbf{r}_m et sa vitesse V^s est associée à celle du squelette poreux.

A chaque point matériel la conservation de la masse de matrice est donnée sous la forme ((Neaupane et al. 1999; Zuber 2002; Zuber and al 2000; Zuber and Marchand 2000; Zuber and Marchand 2004).

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1-n)\mathbf{r}_m] + div [(1-n)\mathbf{r}_m V^s] = 0$$
⁽²⁵⁾

Nous considérons dans ce cas qu'aucune création de la masse solide n'est possible

r=0 dans l'équation 24.

L'équation précédente peut être simplifiée sous la forme

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1 - n}{r_m} \frac{\partial r_m}{\partial t} + (1 - n) div V^s$$
(26)

Cette équation définie finalement la variation de la porosité en fonction du temps.

4.2 La phase liquide

Pour la solution liquide le terme source de masse est présent, du fait que, lors du gel, une partie de la solution se transforme en glace.

Si l'on définie le taux massique de formation de la glace par $W_{l \to s}$, l'équation 24 devient

$$\frac{\partial}{\partial t} [nS_l \mathbf{r}_l] + div [nS_l \mathbf{r}_l v^l] = -\dot{w}_{l \to s}$$
⁽²⁷⁾

où **r**? est la masse volumique du liquide $\lfloor kg/m^3 \rfloor$, S_l est le degré de saturation.

La vitesse de la phase liquide peut être exprimée en fonction de celle du squelette et la vitesse relative de la phase liquide par rapport au squelette solide. On aura donc

$$V^{l} = V^{s} + v_{r}^{l} = V + \frac{\hat{v}_{l-s}}{nS_{l}}$$

$$\tag{28}$$

 \hat{v}_{l-s} : la vitesse macroscopique moyenne donnée par la loi de Darcy $\hat{v}_{l-s} = \frac{-K_{rl}K}{m} \nabla R$.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

K: perméabilité intrinsèque [m²]

- *Krl* : perméabilité relative [-]
- **m** : viscosité dynamique du liquide [pa.s]

Le développement de l'équation 27 donne finalement

$$\frac{n}{r_l}\frac{d\mathbf{r}_l}{dt} + \frac{n}{S_l}\frac{dS_l}{dt} + \frac{dn}{dt} + ndivV^s + \frac{1}{S_l}div\hat{v}_{l-s} = \frac{\dot{w}_{l\to s}}{r_lS_l}$$
(29)

4.3 La glace

Lorsqu'on suppose que le milieu est saturé, le terme de changement de phase est opposé à celui qui apparaît dans l'équation de conservation de la masse liquide. En plus, on suppose que la glace ne s'écoule pas et sa vitesse est celle du squelette. L'équation de conservation de la masse de glace est donc

$$\frac{n \, d\mathbf{r}_s}{\mathbf{r}_s \, dt} + \frac{n \, dS_s}{S_s \, dt} + \frac{dn}{dt} + n div V^s = \frac{\dot{w}_{l \to s}}{\mathbf{r}_s S_s} \tag{30}$$

 \boldsymbol{r}_s masse volumique de la glace $\lfloor kg/m^3 \rfloor S_s$ degré de saturation en glace.

4.4 Lois de comportement des phases

L'état de chacune des phases est une fonction de la température et de la contrainte appliquée à cette phase.

De manière générale la variation de la masse volumique d'un fluide peut s'écrire sous la forme (Zuber and Marchand 2000)

$$d\mathbf{r}_{f} = \frac{\partial \mathbf{r}_{f}}{\partial p} dp + \frac{\partial \mathbf{r}_{f}}{\partial T} dT$$
(31)

On définit le coefficient de dilatation thermique isobare de la phase k, a_k comme étant la variation unitaire de volume observée, à une pression constante, lors d'une variation unitaire de température (Zuber 2002)soit

$$\mathbf{a}_{k} = \frac{1}{V_{k}} \frac{\partial V_{k}}{\partial T}\Big|_{p_{k}} = -\frac{1}{\mathbf{r}_{k}} \frac{\partial \mathbf{r}_{k}}{\partial T}\Big|_{p_{k}}$$

Le module de compressibilité isotherme de la phase k, K_k est défini comme étant la variation unitaire du volume générée par incrément de la pression hydrostatique, soit

$$\frac{1}{K_k} = \frac{1}{V_k} \frac{\partial V_k}{\partial p} \bigg|_T = \frac{1}{r_k} \frac{\partial r_k}{\partial p} \bigg|_T$$

finalement nous obtenons pour la phase liquide

$$\frac{1}{\mathbf{r}_{l}}\frac{\partial\mathbf{r}_{l}}{\partial t} = \frac{1}{K_{l}}\frac{\partial P_{l}}{\partial t} - \mathbf{a}_{l}\frac{\partial T}{\partial t}$$
(32)

_

et, pour la glace

$$\frac{1}{r_s}\frac{\partial r_s}{\partial t} = \frac{1}{K_s}\frac{\partial P_s}{\partial t} - \boldsymbol{a}_s\frac{\partial T}{\partial t}$$
(33)

pour la phase solide, la densité est une fonction de la température et les contraintes appliquées. Cette contrainte est une fonction de la contrainte effective et de la pression poreuse P^p

$$\frac{(1-n)d\mathbf{r}_m}{\mathbf{r}_m dt} = -(1-b)\frac{dtr\mathbf{e}}{dt} + \frac{b-n}{K_m}\frac{dP^p}{dt} - [(b-n)\mathbf{a}_0]\frac{\partial T}{\partial t}$$
(34)

Notons que la vitesse absolue du squelette solide peut être définie en terme de déformation comme

$$divV^{s} = \frac{d(tr\mathbf{e})}{dt}$$

et en substituant la relation 34 dans la relation 26 on trouve

$$\frac{dn}{dt} = (b-n)\frac{dtr\mathbf{e}}{dt} + \frac{b-n}{K_m}\frac{dP^p}{dt} - (b-n)\mathbf{a}_0\frac{dT}{dt}$$
(35)

4.5 Description du système final

Si l'on remplace P^p et P_s par les expressions 1 et 18, et que l'on tienne compte des équations 31, 32, et 34, les relations 29 et 30 peuvent être écrites sous la forme suivante

$$\left(\frac{n}{K_{l}} + \frac{b-n}{K_{m}}\right)\frac{dP_{l}}{dt} + \frac{b-n}{K_{m}}\frac{dX}{dt}$$

$$\left(36\right)$$

$$-\left[n\boldsymbol{a}_{l} + (b-n)\boldsymbol{a}_{0}\right]\frac{dT}{dt} + b\frac{dtr\boldsymbol{e}}{dt} + \frac{n}{S_{l}}\frac{dS_{l}}{dt} + \frac{1}{S_{l}}div\hat{v}_{l-s} = -\frac{\dot{w}_{l\rightarrow s}}{S_{l}}\boldsymbol{r}_{l}$$

$$\left(\frac{n}{K_{s}} + \frac{b-n}{K_{m}}\right)\frac{dP_{l}}{dt} + \frac{b-n}{K_{m}}\frac{dX}{dt} + \frac{n}{K_{s}}\frac{dk_{s}}{dt}$$

$$\left(-\left[n\boldsymbol{a}_{s} + (b-n)\boldsymbol{a}_{0}\right]\frac{dT}{dt} + b\frac{dtr\boldsymbol{e}}{dt} + b\frac{dtr\boldsymbol{e}}{S_{s}}\frac{dS_{s}}{dt} = \frac{\dot{w}_{l\rightarrow s}}{S_{s}}\boldsymbol{r}_{s}$$

$$(36)$$

$$(36)$$

$$\left(\frac{n}{K_{s}} + \frac{b-n}{K_{m}}\right)\frac{dP_{l}}{dt} + \frac{b-n}{K_{m}}\frac{dX}{dt} + \frac{n}{S_{s}}\frac{dS_{s}}{dt} = \frac{\dot{w}_{l\rightarrow s}}{S_{s}}\boldsymbol{r}_{s}$$

 k_s : est la courbure de l'interface solide liquide.

Notons que $S_l + S_s = 1 \Rightarrow \frac{dS_l}{dt} = -\frac{dS_s}{dt}$ parce que le système est supposé toujours saturé, et que $\hat{v}_{l-s} = -\frac{K_{rl}K}{m} \nabla P_l$, on aboutira à l'équation finale, après avoir fait

la somme de $S_l x36$ et $S_s x37$

$$\left(\frac{n}{K_{l}} + \frac{n}{K_{s}} + \frac{b-n}{K_{m}}\right)\frac{dP_{l}}{dt} + \frac{b-n}{K_{m}}\frac{dX}{dt} + \frac{nS_{s}}{K_{s}}\frac{dk_{s}}{dt} - \left[nS_{l}\mathbf{a}_{l} + nS_{s}\mathbf{a}_{s} + (b-n)\mathbf{a}_{0}\right]\frac{dT}{dt} + b\frac{dtr\mathbf{e}}{dt} + div\hat{v}_{l-s} = \left(\frac{1}{\mathbf{r}_{s}} - \frac{1}{\mathbf{r}_{l}}\right)\dot{w}_{l\rightarrow s}$$
(38)

L'expression générale de cette équation peut être écrite sous la forme simplifiée suivante

$$\boldsymbol{b}\frac{dP^{l}}{dt} = div(\frac{K_{rl}K}{\boldsymbol{m}}\nabla P_{l}) + S - b\frac{dtr\boldsymbol{e}}{dt}$$
(39)

Où

$$\boldsymbol{b} = \frac{nS_l}{K_l} + \frac{nS_s}{K_s} + \frac{b-n}{K_m}$$
(40)

$$S = (\frac{1}{\mathbf{r}_{s}} - \frac{1}{\mathbf{r}_{l}})\dot{w}_{l \to s} + \overline{\mathbf{a}} \frac{dT}{dt} - \frac{b - n}{K_{m}} \frac{dX}{dt} - \frac{nS_{s}}{K_{s}} \frac{dk_{s}}{dt}$$
(41)

$$\overline{\boldsymbol{a}} = nS_l \boldsymbol{a}_l + nS_s \boldsymbol{a}_s + (b-n)\boldsymbol{a}_0 \tag{42}$$

Finalement $w_{ls} = \mathbf{r}_s \frac{1}{V} \frac{dV_{l \to s}}{dt}$ (43)

Le terme majeur dans cette relation est le terme S, défini comme le terme responsable de génération de la pression liquide. Ce terme intègre un certain nombre de phénomènes physiques tels que

- La différence de volume occupé par l'eau et la glace due aux écarts de masse volumique.
- Les effets de contractions thermiques du milieu drainé et des constituants.
- Le terme de pression de disjonction représentant l'interaction cristal de glace – parois de pores.
- La pression du cristal de glace lui même.

4.6 Résolution par la méthode des éléments finis

Le problème à résoudre est la vérification en tout point et à tout instant le système d'équations

$$\begin{cases} \nabla \boldsymbol{s} = 0 \\ \boldsymbol{b} \frac{dR}{dt} - \nabla (\boldsymbol{I} \nabla P) - S + \boldsymbol{b} \nabla \frac{du}{dt} = 0 \end{cases}$$
(44)

avec $P=P_l$, $l=\frac{K}{m}$, $\frac{dtr\mathbf{e}}{dt}=\nabla \frac{du}{dt}$, u le vecteur du déplacement. Les inconnues de

notre problème sont les déplacements et la pression liquide en chaque point.

Le traitement numérique nécessite de définir un intervalle de temps critique si l'on veut être en mesure d'observer le phénomène physique étudié. On peut montrer que ce temps est d'autant plus faible que la perméabilité est forte.

L'étape finale est de définir les conditions aux limites. Si on suppose que pour la glace qui se forme à la surface de l'échantillon, sa pression reste égale à la pression atmosphérique, la pression liquide, par conséquent, subit une dépression donnée par la relation 1 avec $P^s=0$, soit:

$$P_L = \frac{-2\boldsymbol{g}_{ls}}{R_{eq}} \tag{45}$$

5. Données d'entrée nécessaires

Les caractéristiques physiques des matériaux étudiés, ainsi que celles de l'eau et de la glace, sont nécessaires pour alimenter le modèle afin de résoudre le système d'équations 44. Nous ne détaillerons pas ici les valeurs ainsi que relations donnant les compressibilités des matériaux drainés et des matrices solides en fonction de la porosité, dont nous admettons la validité pour les tuiles au même titre que pour les matériaux cimentaires et renvoyons le lecteur à la bibliographie (Wardeh 2005).

6. Evolution des caractéristiques au cours des cycles

Au cours des cycles de gel-dégel, les caractéristiques mécaniques et hydrauliques évoluent à cause des dégradations consécutives aux sollicitations mécaniques liées à la formation de réseaux de microfissures. Cet état de dégradation peut se caractériser

par un paramètre d'endommagement, D_{gel} de gel (Wardeh 2005). Ce paramètre scalaire s'introduit directement dans la loi de comportement élastique du milieu poreux, comme étant le paramètre qui tient compte de la réduction de la résistance à cause de l'ouverture des fissures (LeBellégo et al. 2000; Mazars 1984).

Le comportement du milieu drainé (équation 20) s'exprime dans ce cas par la relation modifiée

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}_0 (1 - D) : \mathbf{e}_{\mathbf{e}} \tag{46}$$

Avec \mathbb{C}_0 matrice d'élasticité.

Bary (Bary 1996) a mesuré l'évolution de la perméabilité intrinsèque du béton en fonction du degré d'endommagement, il a trouvé que D peut être utilisé pour caractériser la perméabilité aussi bien que le comportement réduit, il a proposé la relation: $K = K_0 10^{AT.D}$ (47)

AT est une constante du matériau considérée comme étant égale à 4 pour le béton. Dans ce travail, nous nous limitons, tout d'abord au comportement du premier cycle au cours duquel aucune dégradation n'a encore eu lieu. L'étude de l'effet des cycles sur les caractéristiques mécaniques est envisagée pour une future recherche.

7. Simulations numériques, Résultats et discussion

7.1 Influence de la répartition porométrique

L'objectif de cet exemple est d'étudier l'influence des tailles des pores sur les comportements observés. Pour cela nous avons choisi cinq distributions poreuses différentes ayant la même porosité. Figure 3

Ces distributions donnent une large plage de température de formation de la glace, bien que la quantité formée au sein de chaque distribution soit toujours la même.

Le module d'élasticité, la perméabilité, le coefficient de dilatation thermique pour les distributions précédentes sont fixés à 7000 [Mpa], $2,41.10^{-19}$ [m²], et $6,6.10^{-6}$ [K]⁻¹. Ces valeurs sont représentatives des caractéristiques physiques des matériaux à base de terre cuite. On constate sur la figure 4 que la valeur maximale atteinte par le terme X est d'autant plus élevée que les pores sont fins.



Figure 3 : Cinq distributions poreuses différentes selon la taille des pores



Figure 4 : Evolution du terme X en fonction de la répartition porométrique

Quant au terme S (figure 5) il garde la même allure pour les différentes répartitions, les courbes étant simplement décalées vers les basses températures lorsque le diamètre des pores diminue. Ceci pourrait venir du fait que la cinétique de formation de la glace est la même, bien que la température du déclenchement du processus ne soit pas la même. Le terme S est, dans une certaine mesure, une image de la répartition porométrique, car, en effet, les courbes se décalent comme les répartitions porométriques.



Figure 5 : Evolution du terme S en fonction de la répartition porométrique

Les figures 7 et 8 représentent les résultats de la simulation numérique des déformations et de la pression liquide moyennes au cours de la formation de la glace. On s'aperçoit que les cinq matériaux fictifs, ayant ces cinq répartitions porométriques, ne se comportent pas de la même façon.

On constate que lorsque le diamètre de pores diminue (distribution 5 et distribution 1) :

- a) La température de formation de la glace diminue.
- b) Le milieu subit une dilatation de plus en plus importante.
- c) L'amplitude de variation de la pression moyenne de la phase liquide augmente. Toute chose est égale par ailleurs.

Pour une répartition donnée, la figure 8 montre que, lors du début de la formation de la glace, la pression liquide atteint son minimum. La pression du liquide à des températures plus élevées étant plus grande on peut donc admettre un mouvement d'eau des endroits non gelés vers les sites de formation de la glace. C'est le phénomène de cryo-succion (Coussy 2005).

Au fur et à mesure du développement de la glace, la pression du liquide réaugmente au contact des cristaux, le mouvement inverse doit donc se produise. C'est l'augmentation de volume de glace qui gère donc les mouvements d'eau.

7.2 Influence du module d'élasticité

Pour la distribution la plus fine, nous avons simulé les comportements en faisant varier seulement le module d'élasticité. Les résultats sont représentés aux figures 9 et 10. On constate que les déformations sont d'autant plus petites que le module est élevé.



Figure 7: Déformation moyenne de chaque répartition fictive

Par contre, l'amplitude de la pression moyenne, générée au sein du matériau, augmente avec le module d'élasticité.

Un fort module d'élasticité en limitant les déformations produit une augmentation de la pression liquide à l'intérieur des pores.



Figure 8: Evolution de la pression liquide moyenne de chaque répartition fictive



Figure 9 : Déformation moyenne en fonction du module d'élasticité

7.3 Influence de la perméabilité

La distribution poreuse ayant les pores les plus petits a été choisie avec cinq valeurs de la perméabilité variant entre 8×10^{-19} [m²] et 1×10^{-15} [m²]. Le module d'élasticité est fixé à 7000 [Mpa].

L'évolution de la perméabilité relative à l'eau en fonction du volume de glace formée a été pris en compte. Nous avons admis pour cela des variations de même type que celles obtenues en fonction de degré de saturation pour les milieux non saturés.



Figure 10 : Pression liquide moyenne en fonction du module d'élasticité

On observe sur les figures 11 et 12 que les déformations et la pression moyenne sont d'autant plus importantes, après la formation de la glace, que la perméabilité est faible.

On a cité dans le paragraphe précédent qu'un phénomène de pressions hydrauliques se manifeste au cours de la formation de la glace. Celui-ci entraîne un flux opposé aux gradients de pression hydraulique. On peut ajouter que si le mouvement d'eau est gêné à cause de la faible perméabilité, les déformations et les pressions liquides seront importantes. Une telle interprétation avait déjà été proposée par Litvan (Litvan 1975; Litvan 1976; Powers 1949; Powers and Helmuth 1953).

Ces résultats devront être complétés par une étude plus complète des mouvements d'eau et notamment des échanges aux frontières qui auront bien évidemment une influence sur le comportement du milieu étudié.



Figure 11 : Déformations moyennes en fonction de la perméabilité

7.4 Influence des conditions aux limites

En gardant toutes les caractéristiques mécaniques et hydrauliques de la première distribution fictive (E=7000 Mpa, $K=8x10^{19}$ m²), ainsi que les termes qui génèrent la pression poreuse, l'amplitude de la pression liquide imposée à la surface a été variée. Pour cela trois évolutions de cette pression aux frontières du maillage sont choisies.

- a) Eau à la pression atmosphérique: P=0
- b) $P_l = -\frac{s}{r}$



Figure 12 : Pression liquide moyenne en fonction de la perméabilité

Les conditions ont été choisies en imposant, comme on le voit, soit à l'eau (a) soit à la glace (c) de rester à la pression atmosphérique. La condition (b) est une situation intermédiaire.

Les résultats de la simulation numériques sont représentés aux figures 13 et 14. On observe que, les comportements et la pression liquide moyenne sont fortement liés à la pression imposée à la surface. On peut dire à ce stade que le changement de l'état du liquide aux frontières entraîne un changement du comportement du milieu.

7.5 Influence de la porosité du matériau

 $P = -\frac{2\mathbf{s}}{r}$ soit $P_s = 0$

La taille des pores est fixée autour du rayon de 10 nm et le pourcentage des vides varie entre 12.5 et 38 %. L'objectif est de voir l'incidence du volume des vides sur le comportement et la pression moyenne du milieu étudié.

La figure 15 montre que le terme S est fortement influencé par la valeur de n, il est d'autant plus important que la porosité est élevée. Ce phénomène s'explique simplement par le fait que lorsque la porosité est élevée, la quantité d'eau retenue à la saturation est importante, et la quantité de la glace qui se forme lors de l'abaissement de la température est importante.

Quant au terme X, il ne varie pas dans ce cas puisqu'il est lié au rayon des pores et non pas à la porosité. Les déformations obtenues pour des matériaux ayant un module d'élasticité de 7000 Mpa et une perméabilité de $8x10^{-19}$ m² sont représentées à la figure 16 α on montre que celles-ci ainsi que les pressions moyennes sont d'autant plus accentuées que la porosité est élevée.



Figure 13 : Déformations moyennes en fonction de l'état du liquide aux frontières



Figure 14 : Pression liquide moyenne en fonction de l'état du liquide aux frontières

7.6 Applications à la tuile

Les deux tuiles employées dans cette étude sont nommées industriellement CH3 et 2P2. Le travail qui est présenté dans ce paragraphe est une tentative de reproduction, à partir de la seule connaissance de la répartition porométrique d'une

tuile (figure 17), des déformations enregistrées expérimentalement. La formation de la glace, quant à elle, est liée dans ce modèle uniquement à la distribution poreuse. La relation 7 permet donc de prévoir le rayon des pores dans lesquels l'eau est susceptible de geler.



Figure 15 : Evolution du terme S en fonction de la porosité



Figure 16: Déformations moyennes en fonction de la porosité

Comme il est cité à plusieurs reprises (Wardeh 2005; Wardeh and Perrin 2005), la relation précédente n'est pas applicable à ce type de matériaux, parce qu'elle a été développée en supposant que la glace se forme sans phénomène de surfusion (Brun et al. 1977; Coussy 2005; Scherer 1993).



Figure 17 : Distribution poreuse des tuiles.

Pour mener le calcul, nous avons pris en compte la répartition porométrique et la cinétique de formation de la glace. Les résultats sont représentés à la figure 18. On remarque que la pression exercée sur les parois de la 2P2 est plus importante que celle exercée sur ceux de la CH3 du fait que les pores de la 2P2 sont petits par rapport à ceux de la CH3.

Les caractéristiques mécaniques et hydrauliques ainsi que la répartition porométrique étant fixées, il reste à imposer les conditions aux frontières au cours de formation de la glace.

Nous ne sommes pas encore en mesure de décrire les phénomènes de frontières tels que les échanges hydriques entre ambiance, tesson et donc d'en déduire la pression de la phase liquide qui en résulterait.

Nous avons renoncé au choix de conditions trop simples comme celles résultant de l'équilibre thermodynamique eau-glace, la glace étant à la pression atmosphérique, cette solution n'ayant pas donné des bons résultats.

Nous avons donc choisi d'imposer à la fontière la pression liquide déduite de l'expérience par l'intermédiaire de la relation 18 (Wardeh 2005).

Le résultat des calculs est présenté à la figure 19. On constate que le modèle a du mal à reproduire le comportement expérimental.



Figure 18 : L'évolution du terme X dans les deux tuiles



Figure 19 : Déformations obtenues en imposant aux frontière la pression liquide déduite de l'expérience.

Toutefois, ce code numérique constitue un outil tout à fait intéressant pour étudier le comportement des milieux soumis au gel. Il a permis de bien voir l'influence des paramètres les plus importants, tels que répartition porométrique, module d'élasticité, perméabilité à l'eau sur un matériau à porosité fictive ayant des caractéristiques mécaniques proches de celles de la terre cuite.

8. Conclusions.

Nous disposons actuellement d'un code numérique constituant un outil tout à fait intéressant pour étudier le comportement le milieux soumis au gel. Il nous a permis d'ores et déjà de bien voir l'influence des paramètres les plus importants, tels que répartition porométrique, module d'élasticité, perméabilité à l'eau sur un matériau à porosité fictive ayant des caractéristiques mécaniques proches de celles de la terre cuite. La mise en œuvre de ce code pour les tuiles n'a, par contre, pas encore permis de bien reproduire son comportement expérimental lors des cycles gel dégel. Ainsi, si le modèle physique qui est à la base de ce code est un des plus complets qui existe actuellement, il n'en présente pas moins quelques limites liées aux simplifications qu'il contient. En effet ce code décrivant les phénomènes dans le cas de milieux saturés, ne prend pas en compte l'ensemble des échanges à la frontière du matériau. Par ailleurs une comparaison des calculs avec l'expérience a mis en évidence l'importance des conditions à la limite, ainsi que celle de la perméabilité à l'eau du milieu.

Bibliographie.

- Bary, B. (1996). "Etude de couplage hydraulique-mécanique dans le béton endommagé." LMT, C.N.R.S. de Cachan, Université de Paris 6, Publication No. 11, Cachan.
- Beaudoin, J. J., and MacInnis, C. (1974). "The mechanism of frost damage in hardened cement paste." *Cement and Concrete Research*, 4(2), 139-147.
- Bejaoui, S. (2001). "Etude de la formation de la glace au sein de la texture poreuse des matériaux a base de liants hydrauliques," Thèse de doctorat, Toulouse.
- Biot, M. A. (1941). "General theory of three dimensional consolidation." *Journal of Applied Physics*, 12, 155-164.
- Brun, M., Lallemand, A., Lorette, G., Quinson, J.-F., Richard, M., Eyraud, L., and Eyraud, C. (1973). "Changement d'état liquide solide dans les mileux poreux.1 Etude expérimentale de la solidification de l'eau et du benzène." *Journal de Chimie Physique*, 70(6), 973-978.
- Brun, M., Lallemand, A., Quinson, J.-F., and Eyraud, C. (1977). "A new method for the simultaneous determination of the size and the shape of pores: The thermoporometry." *Thermochimica Acta*, 21, 59-88.
- Coussy, O. (2005). "Poromechanics of freezing materials." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(8), 1689-1718.
- Defay, R., and I.Prigogine. (1951). Tension superficielle et adsorption, éditions desoer, Liège.
- Everett, D. H. (1961). "The thermodynamics of frost damage to porous solids." *Transactions* of the Faraday Society, 57, 1541-1551.
- Fagerlund, G. (1973). "Determination of pore-size distribution from freezing point depression." *Matériaux et constructions/Materials and Structures*, 6(33), 215-225.

- Ferronato, M., Gambolati, G., and Teatini, P. (2001). "Ill-conditioning of finite element poroelasticity equations." *International Journal of Solids and Structures*, 38(34-35), 5995-6014.
- LeBellégo, C., Gérard B, Pijaudier-Cabot G, and S, K. "Chemo-mechanical coupled effects in concrete structures submitted to an aggressive water attack." *EM2000 14th Engineering Mechanics Conference.*
- Litvan, G. G. (1975). "Phase transition of adsorbates: VI, Effect of deicing agents on the freezing of cement paste." *Journal of the american Ceramic Society*, 58(1-2), 26-30.
- Litvan, G. G. (1976). "Frost action in cement in the presence of de-icers." *Cement and Concrete Research*, 6(3), 351-356.
- Matala, S. (1995). "Effects of carbonation on the pore structure of granulated blast furnace slag concrete.," PhD thesis, Rep. 6, Helsinki University of Technology, Faculty of the Civil Engineering and Surveying Concrete Technology, Espoo, Finland.
- Mazars, J. (1984). "Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et a la rupture du béton de structure.," Thèse de doctorat d'état.
- Neaupane, K. M., Yamabe, T., and Yoshinaka, R. (1999). "Simulation of a fully coupled thermo-hydro-mechanical system in freezing and thawing rock." *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 36(5), 563-580.
- Powers, T. C. "The air requirement of frost-resistant concrete." *Poc. Highway Res. Board*, 184-211.
- Powers, T. C., and Helmuth, R. A. "Theory of volume changes in hardened Portland cement paste during²freezing." *Proc. Highway Res. Board*, 285-297.
- Scherer, G. W. (1993). "Freezing gels." Journal of Non-Cryst Solids, 155(1), 1-25.
- Scherer, G. W. (1999). "Crystallization in pores." Cement and Concrete Research, 29(8), 1347–1358.
- Selvadurai, A. P. S., and Nguyen, T. S. (1995). "Computational Modelling of Isothermal Consolidation of Fractured Porous Media." *computer and geotechnics*, 17(1), 39-73.
- Vermeer, P. A., and Verruijt, A. (1981). "An accuracy condition for consolidation by finite elements." *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 5, 1-14.
- Wardeh, G. (2005). "Les phénomènes de gel-dégel dans les matériaux à base de terre cuite et les conséquences sur leur durabilité. Expériences et Modélisation," Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier.
- Wardeh, G., and Perrin, B. (2005). "Analysis of Strains in Baked Clay Based Materials During Freezing and Thawing Cycles." *Journal of BUILDING PHYSICS*, 00(0), 1-15.
- Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L. (1989). *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York.
- Zuber, B. (2002). "Vers une modélisation numérique du comportement des matériaux cimentaires exposés au gel.," Thèse de doctorat, école nationale supérierue de Cachan.
- Zuber, B., and al. (2000). "Ice formation mechanisms in normal and high-performance concrete mixture." *ASCEJ Mater Civ Eng*, 12(1), 16-23.
- Zuber, B., and Marchand, J. (2000). "Modeling the deterioration of hydrated cement systems exposed to frost action Part 1: Description of the mathematical model." *Cement and Concrete Research*, 30(12), 1929-1939.
- Zuber, B., and Marchand, J. (2004). "Predicting the volume instability of hydrated cement systems upon freezing using poro-mechanics and local phase equilibria." *Materials and Structures / Matériaux et Constructions*, 37(268), 257-270.