Une application des méthodes d'homogénéisation pour le comportement élastique de Bétons à Matrices Organiques

Nguyen Huy-Gia — Ortola Sophie — Ghorbel Elhem

Laboratoire de Mécanique et Matériaux du Génie Civil - L2MGC Université de Cergy-Pontoise 5 mail Gay-Lussac, Neuville-sur-Oise, 95031 Cergy-Pontoise Cedex <u>hgnguyen77@gmail.com</u> <u>sophie.ortola@u-cergy.f</u>

elhem.ghorbel@u-cergy.fr

RÉSUMÉ. Afin d'améliorer la tenue des bétons et mortiers aux agressions environnementales sous contraintes mécaniques, la matrice cimentaire peut être remplacée par une matrice organique. L'adjonction de fibres courtes permet de surcroît d'obtenir une meilleure résistance aux sollicitations. Nous proposons ici d'exploiter et d'adapter les principes d'homogénéisation pour simuler le comportement de bétons à matrices organiques renforcés par des fibres. La validation de la méthodologie proposée pour simuler le comportement élastique de ce composite tri-phasique est effectuée par confrontation à des résultats expérimentaux de flexion trois points.

ABSTRACT. In order to improve the resistance of concretes and mortars in environmental attacks under mechanical pressures, the cement matrix can be replaced by an organic one. The addition of short fibers allows moreover to obtain a better strength of these materials. We here exploit and adapt the principles of homogenization to simulate the behavior of concretes with organic matrices reinforced by fibers. The validation of the methodology proposed to simulate the elastic behavior of this three-phases composite is performed by confrontation with experimental results of three-points-flexure-tests.

MOTS-CLÉS : Matériaux composites; Homogénéisation; Comportements Effectifs; Modèle Auto-Cohérent; Approximation de Mori-Tanaka.

KEYWORDS: Composite materials; Homogenization; Effective properties; Self-consistent model; Mori-Tanaka approximation.

Revue. Volume X – n° x/année, pages 1 à X

1. Introduction

L'objectif de ce travail est de proposer un outil de simulation numérique permettant de prédire la tenue mécanique d'une structure en Béton à Matrice Organique (BMO). Cet outil repose sur les méthodes d'homogénéisation qui permettent d'estimer les propriétés macroscopiques d'un matériau hétérogène à partir des propriétés des différentes phases qui le constituent et de certains paramètres caractérisant leurs répartitions spatiales. L'avantage des modèles choisis est de permettre d'analyser l'influence du taux de résine et de la géométrie des granulats sur ce comportement macroscopique.

Pour déterminer le comportement équivalent des BMO, les méthodes d'homogénéisation utilisées dans cette étude sont le modèle Auto-Cohérent (Aboudi, 1991) et la théorie de Mori-Tanaka (Mori *et al.*, 1973). Tous deux sont rappelés dans la première partie. Dans la seconde, nous présentons une simulation du comportement élastique d'une poutre en béton de polymère renforcé par de fibres de verre et sollicitée en flexion trois points. Le sable est modélisé par des renforts sphériques et les fibres de verre par des renforts cylindriques orientés dans l'espace de façon aléatoire. Le comportement équivalent est obtenu à l'aide de deux étapes successives d'homogénéisation. Dans la première étape, la méthode Auto-Cohérente est utilisée pour obtenir les propriétés effectives du composite constitué de polyester et de sable seulement. La seconde étape utilise la méthode de Mori-Tanaka pour prendre en compte la présence des fibres de verre. Le comportement homogène équivalent obtenu est ensuite introduit dans le logiciel Castem 2000 afin de simuler l'essai de flexion 3 points de la poutre composite. Ces simulations sont enfin confrontées aux résultats expérimentaux de l'essai (Griffiths *et al.*, 2000).

2. Les modèles de comportement équivalent

Le composite étudié est supposé composé d'une matrice, dénotée par l'index '0', et d'inclusions dénotées par l'index 'r'. Ces inclusions peuvent être alignées ou orientées aléatoirement dans la matrice. Les expressions du tenseur des rigidités C^* et du tenseur des souplesses S^* du matériau composite sont données par :

$$C^* = \sum_{r=0}^{r=n} f_r C_r A_r \qquad S^* = \sum_{r=0}^{r=n} f_r S_r B_r \qquad [1]$$

où f_r est la fraction volumique de chaque phase r. A_r et B_r représentent respectivement le tenseur de localisation des déformations et le tenseur de localisation des contraintes. Les relations [1] montrent que les comportements équivalents du composite seront déterminés dès que les tenseurs de localisation A_r et B_r seront connus. Nous présentons ci-dessous les deux approximations que nous avons choisies. Dans *le modèle Auto-Cohérent*, tous les renforts sont supposés noyés dans un milieu dit homogène équivalent, ayant les propriétés effectives C^* que l'on cherche à déterminer. Le tenseur de localisation des déformations A_r s'écrit alors:

$$A_r^{SC} = [I + S^{Esh} C^{*^{-1}} (C_r - C^*]^{-1}$$
[2]

où S^{Esh} représente le tenseur d'Eshelby (Mura, 1987). En introduisant dans l'équation [2] l'expression de C^* (équation [1]), on obtient le comportement en rigidité équivalent suivant :

$$C^* = C_0 + \sum_{r=1}^{r=n} f_r (C_r - C_0) [I + S^{Esh} C^{*-1} (C_r - C^*]^{-1}$$
[3]

Cette méthode est utilisée pour mettre en exergue la contribution du sable dans le comportement du béton de polymère.

L'approximation de Mori-Tanaka (Mori *et al.*, 1973) suppose que le renfort est noyé dans un milieu infini ayant les propriétés de la matrice. L'ensemble est soumis à l'infini à la déformation moyenne de la matrice in situ dans le composite. On a retenu pour cette approximation les tenseurs établis par (Bourgeois, 1994) :

$$C^* = C_0 \left\{ \left[I + \left(\sum_{r=1}^{r=n} f_r Q_r \right) \left[I + \sum_{r=1}^{r=n} f_r \left(S^{Esh} - I \right) Q_r \right]^{-1} \right\}^{-1}$$
[4]

où :

$$Q_r = [(C_0 - C_r)S^{Esh} - C_0]^{-1}(C_r - C_0)$$
[5]

3. La prise en compte de l'orientation des renforts

L'influence de l'orientation des inclusions sur le comportement effectif du composite est ici présenté en introduisant les trois angles d'orientation d'Euler (Φ, θ, ψ) (Odegard *et al.*, 2003).

La transformation des axes (1, 2, 3) aux axes (1''', 2''', 3''') peut se décomposer en produit de trois rotations successives (figure 1). Les composantes de la matrice de passage correspondante $a(\Phi, \theta, \psi)$ sont données par l'équation [6].



Figure 1. Définition des trois angles d'Euler

$$a(\Phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c_1 c_3 - s_1 c_2 s_3 & -c_1 s_3 - s_1 c_2 c_3 & s_1 s_2 \\ s_1 c_3 + c_1 c_2 s_3 & -s_1 s_3 + c_1 c_2 c_3 & -c_1 s_2 \\ s_2 s_3 & s_1 c_3 & c_2 \end{bmatrix}$$
[6]

où les notations adoptées sont les suivantes : $c_1 = \cos \Phi$, $c_2 = \cos \theta$, $c_3 = \cos \psi$, $s_1 = \sin \Phi$, $s_2 = \sin \theta$, $s_3 = \sin \psi$, $a = \sin 2\Phi$, $b = \sin 2\theta$, $c = \sin 2\psi$, $d = \cos 2\Phi$, $e = \cos 2\theta$, $f = \cos 2\psi$.

Dans le cas de n familles de fibres de différentes orientations, les axes de la micro-échelle ne correspondent plus aux axes de la macro-échelle, et il faut introduire la matrice de passage correspondantes P_r (6x6) de composantes (Decelon, 2000) :

$$P_{r} = \begin{bmatrix} c_{1}^{2}c_{3}^{2} + s_{1}^{2}c_{2}^{2}s_{3}^{2} - \frac{1}{2}acc_{2} & s_{1}^{2}c_{3}^{2} + c_{1}^{2}c_{2}^{2}s_{3}^{2} + \frac{1}{2}acc_{2} & s_{2}^{2}s_{3}^{2} & cs_{1}s_{2} + bc_{1}s_{3}^{2} & cc_{1}s_{1} - bs_{1}s_{3}^{2} & a(c_{3}^{2} - c_{2}^{2}s_{3}^{2}) + cdc_{2} \\ c_{1}^{2}s_{3}^{2} + c_{2}^{2}c_{3}^{2}s_{1}^{2} + \frac{1}{2}acc_{2} & s_{1}^{2}s_{3}^{2} + c_{1}^{2}c_{2}^{2}c_{3}^{2} - \frac{1}{2}acc_{2} & s_{1}^{2}c_{3}^{2} & bc_{1}c_{3}^{2} - cs_{1}s_{2} & -cc_{1}s_{2} - bs_{1}c_{3}^{2} \\ s_{1}^{2}s_{2}^{2} & c_{1}^{2}s_{2}^{2} & c_{2}^{2} & -bc_{1} & bs_{1} & -as_{2}^{2} \\ -\frac{1}{2}(as_{2}s_{3} + bs_{1}^{2}c_{3}) & \frac{1}{2}(as_{2}s_{3} - bc_{1}^{2}c_{3}) & \frac{1}{2}bc_{3} & -s_{1}c_{2}s_{3} + ec_{1}c_{3} & -c_{1}c_{2}s_{3} - es_{1}c_{3} \\ \frac{1}{2}(as_{2}c_{3} - bs_{1}^{2}s_{3}) & -\frac{1}{2}(as_{3}c_{3} + bc_{1}^{2}s_{3}) & \frac{1}{2}bs_{3} & ec_{1}s_{3} - s_{1}c_{2}c_{3} & -c_{1}c_{2}s_{3} - es_{1}c_{3} \\ \frac{1}{2}[-afc_{2} + c(s_{1}^{2}c_{2}^{2} - c_{1}^{2})] & \frac{1}{2}[afc_{2} + c(c_{1}^{2}c_{2}^{2} - s_{1}^{2})] & \frac{1}{2}cs_{2}^{2} & fs_{1}s_{2} - \frac{1}{2}bcc_{1} & fc_{1}s_{2} - \frac{1}{2}bcs_{1} & c_{2}(dc_{3}^{2} + s_{1}^{2}s_{3}^{2}) - \frac{1}{4}ac(2 + c_{2}^{2}) \\ \hline \end{bmatrix}$$

En adoptant l'approximation de Mori-Tanaka [4], le comportement équivalent du composite est alors décrit par son tenseur de rigidité d'expression :

$$C^{*} = C_{0} \left\{ \left[I + \left(\sum_{r=1}^{r=n} f_{r} P_{r} Q_{r} P_{r}^{t} \right) \left[I + \sum_{r=1}^{r=n} f_{r} P_{r} \left(S^{Esh} - I \right) Q_{r} P_{r}^{t} \right]^{-1} \right\}^{-1}$$
[8]

C'est ce comportement équivalent [8] qui sera utilisé pour modéliser la présence de fibres de verre dans la poutre en béton de polymère. L'équation [8] est identique à l'équation précédente [4] lorsque la matrice P_r est égale à la matrice d'identité, c'est à dire, lorsque les trois angles d'Euler satisfont $\Phi = \theta = \psi = 0$.

Nous avons étudié l'influence de l'orientation des fibres (nombre de combinaisons de familles de fibres orientées) sur le comportement équivalent du matériau hétérogène (Nguyen *et al.*, 2006). En particulier, nous avons vérifié qu'en augmentant et en diversifiant les combinaisons de fibres cylindriques, le comportement macroscopique homogène équivalent obtenu est isotrope, voire quasi-isotrope.

4. Application : flexion 3 points d'une poutre en béton de polymère renforcée de fibres

Les modèles Auto-Cohérent et de Mori-Tanaka présentés ont été utilisés pour simuler le comportement d'une poutre en BMO renforcée par des fibres de verres (composite tri-phasique) sollicitée en flexion trois points (Griffiths *et al.*, 2000). Cette poutre se compose d'une matrice en polyester (20.5%) mélangée à du sable silica (78%) et renforcée par de fibres de verre (1.5%). Les propriétés élastiques de ces trois constituants sont présentées dans le tableau 1.

	Module de Young (GPa)	Coefficient de Poisson
Résine de polyester	4	0.3
Sable de silice (Carmichael, 1984)	73.08	0.172
Fibres de verre E	73	0.15

Table 1. Modules élastiques des constituants

Le comportement équivalent C^* de cette poutre en BMO renforcée est obtenu à l'aide de deux étapes successives d'homogénéisation (figure 2); la première permettant de prendre en compte la présence du sable (de rigidité C_1), et la seconde les fibres (de rigidité C_2). Dans notre modélisation, le sable est représenté par des

renforts sphériques et les fibres de verre par des renforts cylindriques orientés dans l'espace de façon aléatoire (figure 2).



Figure 2. *Deux étapes d'homogénéisation pour le comportement équivalent du béton de polymère renforcé*

Dans la première étape, le modèle Auto-Cohérent est utilisé pour obtenir les propriétés effectives C_0^* du composite constitué de polyester et de sable. Les composantes obtenues pour ce tenseur C_0^* sont les suivantes :

C * -	(48.919	8.7818	8.7818	0	0	0
	8.7818	48.919	8.7818	0	0	0
	8.7818	8.7818	48.919	0	0	0
$C_0 =$	0	0	0	20.0691	0	0
	0	0	0	0	20.0691	0
	0	0	0	0	0	20.0691

Le comportement équivalent C_0^* ainsi obtenu est ensuite considéré, dans la deuxième étape, comme une nouvelle matrice à laquelle sont ajoutées les fibres courtes. Le comportement homogène élastique équivalent C^* du béton de polymère renforcé est alors obtenu en utilisant la méthode de Mori-Tanaka. Les composantes correspondantes pour le comportement équivalent du composite tri-phasique sont les suivantes :

C * -	(49.2306	8.8433	8.8366	0	0	0)
	8.8433	49.2306	8.8366	0	0	0
	8.8366	8.8366	49.3374	0	0	0
C –	0	0	0	20.2050	0	0
	0	0	0	0	20.2050	0
	0	0	0	0	0	20.1936

Ces dernières valeurs ont été introduites dans le code de calcul par éléments finis Castem 2000 pour simuler l'essai de flexion trois points de la poutre composite et les résultats numériques de cette simulation sont comparés aux résultats expérimentaux (Griffiths *et al.*, 2000).



Figure 3. Courbes de comparaison force/flèche obtenues par les essais de Griffiths et par la simulation numérique avec CASTEM 2000

La figure 3 montre qu'il existe une très bonne corrélation entre les résultats numériques effectuées dans ce travail et les résultats expérimentaux obtenus dans la phase élastique. D'autre part, pour tenir compte de la réponse non linéaire observée expérimentalement, la visco-plasticité de la matrice et l'endommagement du composite doivent être introduits dans les modèles.

4. Conclusion et perspectives

Nous avons ici présenté, suivant les méthodes d'homogénéisation, la simulation des comportements élastiques de composites utilisés dans les applications génie civil. Les matériaux considérés se composent d'au moins trois phases : la matrice (résine polymère), le sable (modélisé par des sphères) et les renforts (fibres de verres modélisé par des cylindres). L'effet des fibres sur le comportement élastique des bétons de polymère n'est pas ici prédominant. Leurs contributions dans le comportement non linéaire des bétons ainsi que dans les mécanismes de rupture et d'endommagement seront pris en compte à l'aide des outils en cours d'implémentation.

5. Bibliographie

- Aboudi, J., A Unified Micromechanical Approach, Mechanics of Composite Materials, Elsevier, 1991.
- Benveniste, Y., « A new approach of the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials », *Mechanics of Materials*, n° 6, 1987, p. 147-157.
- Bourgeois, N., Caractérisation et modélisation micromécanique du comportement et de l'endommagement d'un composite à matrice métallique : Al/SiCp, Thèse de l'Ecole Centrale de Paris, 1994.
- Carmichael, R. S., Handbook of Physical Properties of Rocks, Volume III, CRC Press, 1984, p. 92-94.
- Decolon, C., Structure Composites Calcul des plaques et des poutres multicouches, Hermes, 2000.
- Griffiths, R., Ball, A., « An assessement of the properties and degradation behaviour of glassfibre-reinforced polyester polymer concrete », *Composites Science and Technology*, n° 60, 2000, p. 2747-2753.
- Le Pen, E., Approche micromécanique du comportement en fatigue d'un matériau composite à matrice aluminium renforcée par fibre d'alumine, Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 1999.
- Mura, T., Micromechanics of Defects in Solids, Martinus Nijhoff, 1987.
- Mori, T., Tanaka, K., « Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions », *Acta Metallurgica*, vol. 21, 1973, p. 571-574.
- Nguyen, H.G., Ghorbel, E., Ortola, S., « An application of homogenization's method for the behavior elastic of polymer concrete », First Euro Mediterranean Symposium on Advances in Geomaterial and Structures, ASG'2006, May 3-5, 2006 - Hammamet -Tunisia.
- Odegard, G.M., Gates, T.S., Wise, K.E., Park, C., Siochi, E.J., « Constitutive modeling of nanotube-reinforced polymer composites », *Composites Science and Technology*, No.63, 2003, p. 1671-1687.
- Qui, Y.P., Weng, G.J., « The influence of inclusion shape on the overall elastoplastic behavior of a two-phase isotropic composite », *Int. J. Solids Structures*, n° 27, 1991, p. 1537-1550.
- Tandon, G.P., Weng G.J., « Average stress in matrix and effective moduli of randomly oriented composites », *Composites Science and Technology*, n° 27, 1986, p. 111-132.
- Weng, G.J., « Some elastic properties of reinforced solids, with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions », *Internat. J. Engng. Sci.*, n° 22, 1984, p. 845-856.