Modélisation numérique de l'endommagement anisotrope et unilatéral dans les structures en béton

Mohammed Matallah^{*} – Christian La Borderie^{*}

*Laboratoire de Sciences Appliquées au Génie Civil et Côtier Université de Pau et des Pays de l'Adour 1,allée du parc Montaury 64600 Anglet

mohammed.matallah@univ-pau.fr

RÉSUMÉ. La dégradation mécanique du béton s'accompagne de micro et macrofissurations. Une bonne description des effets mécaniques de cette dégradation nécessite la modélisation conjointe de l'endommagement, déformations anélastiques des effets unilatéraux et de l'anisotropie. Une description classique de l'endommagement couplé à la plasticité mène généralement à des modèles basés sur une partition des contraintes ou déformations en partie positive et négative. Les modèles ainsi développés sont particulièrement complexes et souvent numériquement instables. Nous proposons un couplage novateur de l'endommagement avec l'anélasticité menant à la définition d'une nouvelle variable interne : l'"Ouverture Unitaire de Fissure". Cette nouvelle variable interne permet d'introduire naturellement les effets unilatéraux, et l'anisotropie induite. Le modèle est implémenté dans le code de calcul éléments finis Cast3M et des résultats de simulations numériques sont présentés.

ABSTRACT. The mechanical degradation of concrete is accompanied by micro and macro cracking. A good mechanical description of the effects of this degradation requires the joint modeling of the damage, the anelastic strains, the unilateral effects and the induced anisotropy. A traditional description of damage coupled with plasticity generally leads to models based on a partition of the stress or strain in positive and negative parts. The models thus developed are particularly complex and often numerically unstable. We propose an innovative coupling of the damage with the plasticity leading to the definition of a new internal variable: "Unitary Crack Opening". This new internal variable makes it possible to naturally introduce the unilateral effects and the induced anisotropy. The model is implemented in the finite elements code Cast3M and results of simulations are presented.

MOTS-CLÉS : Anisotropie, effet unilatéral, endommagement, anélasticité KEYWORDS: Anisotropy, unilateral effect, damage, inelasticity

1^{re} soumission à 24èmes Rencontres Universitaires de Génie Civil, le 30 mars 2006.

1. INTRODUCTION :

Le comportement du béton est la combinaison de plusieurs mécanismes, principalement non linéaires. Ce matériau étant fragile, les non linéarités s'accompagnent de micro et/ou de macro-fissures. De ce fait une attention particulière doit être portée au comportement du matériau pour pouvoir reproduire correctement les différents phénomènes mis en jeu lors de sa dégradation. A ce jour, plusieurs modèles ont été développés pour répondre à la volonté d'obtenir des résultats proches de la réalité, chacun de ces modèles a contribué a une connaissance meilleure du comportement du béton. Le présent travail a pour objectif de proposer un modèle robuste, fiable, capable de reproduire correctement les phénomènes associés à la dégradation du béton et comportant un nombre minimal de paramètres. Comme pour d'autres matériaux fragiles, la dégradation du béton est fortement liée à la présence des extensions [MAZ 84]. Les fissurations prennent des orientations privilégiées en fonction des sollicitations, et créent de toute évidence de l'anisotropie. Dans le nouveau modèle, les effets de la micro fissuration puis la macrofissuration sont modélisés par de l'endommagement accompagné de déformations anélastiques. La prise en compte de l'effet unilatéral est facilitée grâce à la formulation novatrice proposée.

Nous allons dans un premier temps exposer les bases théoriques du modèle. L'aspect thermodynamique du modèle est décrit dans la section suivante. Des résultats de simulations du comportement du béton sont présentés.

2. BASES THÉORIQUES DU MODÈLE PROPOSÉ

Nous proposons un modèle basé sur un couplage endommagement-déformations anélastiques. Ces dernières représentent l'Ouverture Unitaire des micro-Fissures (OUF) ε_{ouf} et sont les résultats des extensions créées dans le matériau.

Les déformations anélastiques sont anisotropes, et sont représentées par un tenseur d'ordre 2, tandis que l'endommagement est caractérisé par une seule variable scalaire, **sa loi d'évolution sera la même en traction et en compression**.

L'originalité de la formulation vient du fait que l'endommagement n'intervient pas comme dans la plupart des modèles[MAZ 84][FIC 96] comme multiplicateur des déformations élastiques mais des déformations anélastiques " $D\varepsilon_{ouf}$ ". Une formulation du même type a été utilisée par Ragueneau [RAG 00] pour modéliser les effets hystérétiques. Le caractère anisotrope des déformations anélastiques module l'effet de l'endommagement suivant la sollicitation, ainsi l'endommagement de traction se traduit par des micro-fissures dont le développement est perpendiculaire à l'axe de chargement, il est directement créé par les extensions dans la direction de la sollicitation. Tandis qu'en compression, les fissures se propagent dans des plans parallèles à l'axe de chargement, l'endommagement est créé par les déformations radiales.

La figure 1 montre l'effet du couplage endommagement-déformations anélastiques.

Endommagement dans les structures en béton 3



Figure 1. Effet du couplage Endommagement -Déformations anélastiques

L'endommagement est toujours isotrope. En cas de traction, les extensions sont majoritaires dans la directions du chargement et l'endommagement se trouve entièrement activé dans cette direction. Tandis qu'en compression, les extensions sont majoritairement radiales et dans la direction du chargement, seulement une partie de l'endommagement se trouve activée.

La gestion des phénomènes unilatéraux se fait naturellement par l'intervention de la variable ε_{ouf} sans partition des déformations [CHA 05][GOD 05] ou des contraintes [LAB 91][FIC 96]; "L'OUF active ou désactive l'endommagement".

La figure 2 montre l'effet de la présence de la variable OUF dans la gestion de l'endommagement. Le ressort schématise l'élasticité linéaire (matériau sain), tandis que la butée schématise un seuil de déformation. Si l'OUF est activée (fissures ouvertes) la dégradation du matériau est représentée par de l'endommagement associé au déformations anélastiques. En revanche quand l'OUF est désactivée (fissures fermées) l'effet de la dégradation est annulé automatiquement et le matériau retrouve son caractère élastique original. La variables ε_{ouf} est liée aux déformations anélastiques ε_{an} par une variable scalaire S fonction de l'état de contraintes qu'on va appeler "indicateur d'ouverture de fissures".

$$\varepsilon_{ouf} = S \,\varepsilon_{an} \tag{1}$$

4 1^{re} soumission à 24èmes Rencontres Universitaires de Génie Civil.



Figure 2. Modèle analogique

3. ASPECT THERMODYNAMIQUE :

Le modèle est basé sur la mécanique de l'endommagement et la thermodynamique des processus irréversibles. On postule l'existence d'un potentiel thermodynamique duquel dérivent les lois d'états, ce potentiel doit être convexe par apport aux variables d'état choisies.

$$\Psi = \Psi(\varepsilon, \varepsilon_{ouf}, D, p)$$
^[2]

3.1. Potentiel et lois d'état :

Nous postulons une forme du potentiel énergie libre spécifique de Helmotz Ψ :

$$\rho \Psi = \frac{1}{2} C_{ijkl} : (\varepsilon_{kl} - D\varepsilon_{kl}^{ouf}) : (\varepsilon_{kl} - D\varepsilon_{kl}^{ouf}) + f(p)$$
[3]

 ρ :masse volumique ; Ψ : potentiel d'état .

 C_{ijkl} : tenseur d'élasticité du matériau vierge.

 ε_{ij} : tenseur d'ordre 2 de déformations totales ; ε_{ij}^{ouf} : tenseur d'ordre 2 d'Ouverture Unitaire de Fissures.

D: variable scalaire d'endommagement.

p : variable interne représentant l'état d'écrouissage (déformation anélastique cumulée).

Les variables forces thermodynamiques associées aux variables d'état sont données par :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = C_{ijkl} : (\varepsilon_{kl} - D\varepsilon_{kl}^{ouf})$$
^[4]

Endommagement dans les structures en béton 5

$$\sigma_f = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ouf}} = -DC_{ijkl} : (\varepsilon_{kl} - D\varepsilon_{kl}^{ouf})$$
^[5]

$$Y = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} = -\varepsilon_{kl}^{ouf} : C_{ijkl} : (\varepsilon_{kl} - D\varepsilon_{kl}^{ouf})$$
^[6]

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p} \tag{7}$$

Le tableau présente les différentes variables thermodynamiques.

Variables d'états		Variables Associées
Observables	internes	
ε		σ
	ε^{ouf}	σ_{f}
	p	R
	D	Y

Tableau 1. Variables thermodynamiques

La convexité du potentiel thermodynamique par rapport au déformation est toujours assurée :

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} \ge 0$$
[8]

3.2. Choix de la fonction seuil :

Le critère de rupture proposé est un critère de rupture multisurfaces formé de deux critères de Drucker Prager, l'un pour modéliser la traction et l'autre pour la compression.

L'écoulement anélastique est séparé (mathématiquement) de l'endommagement. La fonction de charge est exprimée en terme de contraintes effectives $\tilde{\sigma}$ tel que :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - D\varepsilon_{kl}^{ouf}) - C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{ouf}(1 - D)$$
[9]

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{ouf})$$
^[10]

6 1^{re} soumission à 24èmes Rencontres Universitaires de Génie Civil.

Le critère de traction s'écrit :

$$F_t = \alpha_t \ J_2(\tilde{\sigma}) + \beta_t \ I_1(\tilde{\sigma}) - R_t - Knst_t$$
[11]

 J_2 : est le deuxième invariant du tenseur de contraintes déviatoriques.

 I_1 : est le premier invariant du tenseur de contraintes.

 R_t : est l'écrouissage négatif de traction.

 $Knst_t$: limite élastique en traction.

Le critère de compression s'écrit :

$$F_c = \alpha_c \ J_2(\tilde{\sigma}) + \beta_c \ I_1(\tilde{\sigma}) - R_c - Knst_c$$
[12]

 R_c , $Knst_c$ sont respectivement la fonction d'écrouissage de compression et la limite élastique en compression.

Les paramètres α_t , β_t , α_c , β_c sont identifiés de manière à obtenir une surface seuil proche de celle donnée par l'expérimentation (figure3).

Les lois d'évolution des variables internes sont données par la règle de normalité :

$$\varepsilon_{ij}^{ouf} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$
[13]

Nous proposons une loi non associée pour décrire le comportement en traction et de garder le caractère associé du modèle en compression.

Les potentiels anélastiques s'écrivent alors :

$$\begin{cases} g_t = \alpha_g \ J_2(\tilde{\sigma}) + \beta_g \ I_1(\tilde{\sigma}) - R_t - Knst_t \\ g_c = F_c \end{cases}$$
[14]

A l'intersection des deux surface de charge, l'ambiguïté sur la direction de l'écoulement anélastique est levée par la proposition de Koiter[KOI 53] qui considère cette contribution conformément à l'écriture suivante :

$$\varepsilon_{ij}^{ouf} = \dot{\lambda}_t \left\{ \frac{\partial g_t}{\partial \sigma_{ij}} \right\} + \dot{\lambda}_c \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\}$$
[15]



Figure 3. Surface de rupture dans le plan (σ_1, σ_2)

$$\varepsilon^{ouf} = \varepsilon_t^{ouf} + \varepsilon_c^{ouf} \tag{16}$$

Où $\dot{\lambda}_t$, $\dot{\lambda}_c$ représentent respectivement les multiplicateurs anélastiques en traction et en compression.

3.3. Prise en compte du caractère unilatéral :

La prise en compte du caractère unilatéral est facilitée grâce à la nouvelle formulation proposée.

La fonction S citée dans l'introduction permet d'annuler progressivement les déformations anélastiques créées en traction quand le matériau est soumis à un chargement de compression. La variable ε^{ouf} s'écrit :

$$\varepsilon^{ouf} = S \,\varepsilon_t^{an} + \varepsilon_c^{an} \tag{17}$$

8 1^{re} soumission à 24èmes Rencontres Universitaires de Génie Civil.

La fonction S est donnée par :

$$S = 1 - \frac{f_t(\tilde{\sigma}, R)}{f_t(\sigma_f, R)}$$
[18]

 σ_f représente la contrainte au point de restauration de la raideur (donnée expérimentale).



Figure 4. simulation du comportement unilatéral du béton

La figure 4 montre le caractère unilatéral du modèle. La réponse du modèle à des cycles de traction-compression est représentée. La description des déformations volumiques correspond à celle trouvée expérimentalement par Ramtani [RAM 99].

4. RÉSULTATS DE SIMULATIONS NUMÉRIQUES :

4.1. *Exemple d'un élément de volume soumis à la traction puis au cisaillement (Willam's TEST) :*

Ce test a été initialement proposé par Willam et al [WIL 87]. L'objectif de ce test est d'observer la réponse du modèle lorsque le repère propre du chargement tourne.

Un élément de volume est chargé tout d'abord en traction uniaxiale jusqu'au pic, puis au cisaillement couplé à la traction biaxiale. Ceci implique la rotation des directions des déformations principales.

$$[\dot{\varepsilon}_{xx}:\dot{\varepsilon}_{yy}:2\dot{\varepsilon}_{xy}] = [0.5:0.75:1.00]$$

La figure 5 nous montre l'évolution des différentes composantes de la contrainte en fonction de la déformation ε_{xx} . Dans la mesure où le test de Willam est un test théorique, il nous est difficile de porter un jugement précis sur cette prédiction. Néanmoins le comportement obtenu avec notre modèle semble caractéristique de ce qu'on peut attendre des modèles anisotropes (phénomène d'inversion de signe de contrainte de cisaillement)[CAR 01][WEI 98]. Pour ce qui est du nouveau modèle, malgré le caractère isotrope de l'endommagement, son évolution anisotrope (due au couplage avec les déformations anélastiques) nous a permis de reproduire des phénomènes représentés seulement par des modèles anisotropes plus complexes avec (dans certains cas) un nombre important de paramètres.

le nouveau modèle est capable de modéliser le caractère anisotrope et unilatéral des structures en béton. Sur le plan quantitatif, une comparaison avec des résultats expérimentaux s'avère utile pour tester les performances du nouveau modèle.

5. Bibliographie

- [CAR 01] CAROL I., RIZZI E., WILLAM K., « On the formulation of anisotropic elastic degradation. part I. Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 38, 2001, p. 491-518.
- [CHA 05] CHALLAMEL N., LANOS C., CASANDJIAN C., « Strain-based anisotropic damage modelling and unilaterla effects », *Int.J. of Mechanical Sciences*, vol. 47, 2005, p. 459-473.
- [FIC 96] FICHANT S., « Endommagement et anisotropie induite du béton de structures. Modélisation approchée », Thèse de doctorat, ENS de Cachan, France, 1996.
- [GOD 05] GODARD V., « Modélisation de l'endommagement anisotrope du béton avec prise en compte de l'effet unilateral : Application à la simulation des enceintes de confinement nucléaire », Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (ParisVI), 2005.
- [KOI 53] KOITER W., « Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface », Q,Appl.Math, vol. 11, 1953, p. 350-354.



Figure 5. Évolution des contraintes en fonction de ε_{xx}

- [LAB 91] LABORDERIE C., « Phénomènes Unilatéraux dans un Matériau Endommageable : Modélisation et Application à l'Analyse de Structures en Béton. », Thèse de Doctorat, Université Paris 6, Ècole Normale Supérieure de Cachan, mai 1991.
- [MAZ 84] MAZARS J., « Application de la Mécanique de l'Endommagement au Comportement Non-Linéaire et à la Rupture du Béton de Structures », Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1984.
- [RAG 00] RAGUENEAU F., LA BORDERIE C., MAZARS J., « Damage Model for Concrete Like Materials Coupling Cracking and Friction, Contribution Towards structural Damping : Firts Uniaxial Applications », *Mechanics of Cohesive-Frictional Material*, vol. 5, n° 8, 2000, p. 607–625.
- [RAM 99] RAMTANI S., « Contribution à la Modélisation de Comportement Multiaxial du Béton Endommagé avec description de l'Effet Unilatéral », Thèse de Doctorat, Université Paris 6, 1999.
- [WEI 98] WEIHE S., KROEPLIN B., DE BORST R., « Classification of smeared carck models based on material and structural properties », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 35, n° 12, 1998, p. 1289-1308.
- [WIL 87] WILLAM K., PRAMONO E., STURE S., « Fundamental issues of smeared crack models », SHAH S., SWARTZ S., Eds., SEM/RILEM International Conference on Fracture of Concrete and Rock, Bethet, Connecticut, 1987, p. 192-207.